Chapitre 10

Algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou, plus généralement, un corps contenant $\mathbb{Q}$.

10.1 Espaces vectoriels

10.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.1

Soit E un ensemble. Une application « $\cdot$ » de la forme

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times E & \to & E \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

est appelée **loi de composition externe** sur E.

Définition 10.2 (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\cdot$. On dit que E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ si

(i) $(E, +)$ est un **groupe commutatif**, c'est-à-dire
- ➢ La loi $+$ admet un **élément neutre** dans E, noté 0_E,
- ➢ la loi $+$ est **associative**,
- ➢ tout $x \in E$ admet un symétrique par $+$, noté $-x$,
- ➢ a loi $+$ est **commutative**.

(ii) la loi $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
- ➢ $\forall x \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$,
- ➢ $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$,
- ➢ $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,
- ➢ $\forall x \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Définition 10.3

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel E, les éléments de E sont appelés des **vecteurs** de E ; l'élément 0_E est appelé **vecteur nul**. $\mathbb{K}$ est appelé **corps de base** de E et ses éléments sont appelés des **scalaires**.

Proposition 10.4

Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x)$;

(ii) $\lambda \cdot x = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$;

(iii) Si $x \neq 0_E$, alors $\lambda \cdot x = \mu \cdot x \Leftrightarrow \lambda = \mu$;

(iv) Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \cdot x = \lambda \cdot y \Leftrightarrow x = y$.

Définition 10.5

Soient $(u_i)_{i=1\ldots n}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_i un vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,$$

où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1 \ldots n$.

Remarque. Un objectif est souvent de savoir exprimer n'importe quel vecteur comme combinaison linéaire de certains vecteurs de base, les λ_i jouant alors le rôle de coordonnées ; nous y reviendrons.

10.1.2 Exemples fondamentaux

Produit d'espaces vectoriels

Définition et proposition 10.6

Soient $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors on peut définir sur $E_1 \times E_2$ la loi de composition interne

$$+ \ : \ \begin{array}{rcl} (E_1 \times E_2)^2 & \to & E_1 \times E_2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{array}$$

et la loi de composition externe

$$+ \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) & \to & E_1 \times E_2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \end{array}$$

qui en font un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : l'**espace vectoriel produit** de E_1 et E_2.

Remarque. Ceci permet de définir le plan $\mathbb{R}^2$ ainsi que tous les espaces $\mathbb{K}^n$.

Espaces de polynômes

Proposition 10.7

La loi externe

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & & (\lambda, P) & \mapsto & \lambda \times P \end{array}$$

fait de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espaces de fonctions

Définition et proposition 10.8

Étant donnés un ensemble X et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on note $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions $X \to E$. On peut définir la **somme** de fonctions et la **multiplication par un scalaire** : étant donnés $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcrcl} f+g & : & X & \to & E \\ & & x & \to & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcrcl} \lambda \cdot f & : & X & \to & E \\ & & x & \to & \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

qui font de $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

10.1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 10.9

Soit $(E, +, \cdot)$ un mK-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si

(i) F est non-vide,

(ii) F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire
- $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$,
- $\forall x \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$

Remarque. En pratique, pour montrer que F est non vide, on vérifiera le plus souvent que $0_E \in \mathbb{F}$.

Proposition 10.10

Soit F un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors la restriction à F des lois $+$ et $\cdot$ fait de $(F, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. Le plus souvent, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on s'attachera à montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Proposition 10.11 (Intersection de sous-espaces)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(F_i)_{i=1\dots n}$ n sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) Soit I un ensemble quelconque et soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 10.12 (Sous-espace engendré)

(1) Soient E un espace vectoriel et A une partie de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A et on note $\operatorname{Vect} A$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. Autrement dit, $F = \operatorname{Vect} A$ si et seulement si

  (i) F est un sous-espace vectoriel de E,

  (ii) $A \subset F$,

  (iii) pour tout sous-espace G de E tel que $A \subset G$, on a $F \subset G$.

(2) Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Le **sous-espace engendré par la famille** (u_i) est le sous-espace engendré par l'ensemble $\{u_i,\, i \in I\}$, noté $\operatorname{Vect}((u_i)_{i\in I})$.

Définition 10.13 (Somme de sous-espaces)

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la **somme de** F_1 **et** F_2 est l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{x \in E,\, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\, x = x_1 + x_2\}.$$

Proposition 10.14

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$F_1 + F_2 = \operatorname{Vect}(F_1 \cup F_2).$$

A fortiori, $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 10.15 (Générateurs et sommes)

(i) Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E. Alors $\operatorname{Vect} A + \operatorname{Vect} B = \operatorname{Vect}(A \cup B)$.

(ii) Soient $(u_i)_{i=1\dots n}$ et $(v_j)_{j=1\dots m}$ deux familles de vecteurs de E.
On note $(w_k)_{k=1\dots n+m} = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$. Alors

$$\operatorname{Vect}\left((u_i)_{i=1\dots n}\right) + \operatorname{Vect}\left((v_j)_{j=1\dots m}\right) = \operatorname{Vect}\left((w_k)_{k=1\dots n+m}\right).$$

Théorème et définition 10.16

On dit que deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont **supplémentaires dans** E s'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

(i) $\forall x \in E$, $\exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$.

(ii) $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

On note $E = F_1 \oplus F_2$.

10.2 Applications linéaires

Dans la suite, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

10.2.1 Définitions

Définition 10.17

On dit qu'une application $f : E \to F$ est **linéaire** (ou $\mathbb{K}$-**linéaire**) de E dans F si

(i) $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Remarque. On parle aussi de **morphisme** ou d'**homomorphisme** d'espaces vectoriels.

Proposition 10.18

Soit $f :\to F$ une application linéaire. Alors

(i) $f(0_E) = 0_F$,

(ii) $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition 10.19

(i) Une application linéaire $E \to E$ est appelée **endomorphisme de** E.

(ii) Une application linéaire $E \to \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire sur** E.

Notations. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ (on trouve parfois $\mathrm{End}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

10.2.2 Opérations

Proposition 10.20 (Structure)

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des morphismes de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarque. En particulier, l'application nulle et la combinaison d'applications linéaires sont des application linéaires.

Proposition 10.21 (Composition)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Proposition 10.22

Soient $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,

(ii) $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$,

(iii) $g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f$.

Remarque. Dans le cas où $E = F = G$, ces propriétés font de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ un anneau.

10.2.3 Bijectivité

Proposition 10.23

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et bijective. Alors la réciproque de f est une application linéaire $f^{-1} : F \to E$.

Définition 10.24

(i) On dit que $f : E \to F$ est un **isomorphisme de** E **dans** F si elle est linéaire et bijective.
On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

(ii) On dit que $f : E \to E$ est un **automorphisme de** E si elle est linéaire et bijective.
On appelle **groupe linéaire** l'ensemble des automorphismes de E, noté $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition 10.25

(i) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes. Alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme.

(ii) Soient f et g deux automorphismes de E. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux automorphismes de E.

Remarque. Cette propriété fait de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ un groupe.

10.2.4 Noyau, image

Définition 10.26 (Noyau)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau de** f, noté $\operatorname{Ker} f$, l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

Proposition 10.27

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 10.28

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Définition 10.29 (Image)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de f, notée $\operatorname{Im} f$, l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Proposition 10.30

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 10.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

10.2.5 Équations linéaires

Définition 10.32

On appelle **équation linéaire** une équation d'inconnue x de la forme

$$f(x) = b \tag{10.1}$$

avec
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$,
- $b \in F$ appelé **second membre** de l'équation.

Théorème 10.33 (Solutions d'une équation linéaire)

L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solutions de l'équation linéaire (10.1) est
soit vide,
soit un sous-espace affine de E dont la direction est $\operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire : si x_0 est une solution de l'équation (10.1), alors $\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$.

Remarque. Pour résoudre une équation linéaire comme celle présentée en (10.1), il faut donc trouver une solution particulière à cette équation, ainsi que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre (appelée **équation homogène**) : $f(x) = 0_F$.

Proposition 10.34 (Principe de superposition)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $(b_i)_{i=1\ldots n}$ une famille d'éléments de F et $(\lambda_i)_{i=1\ldots n}$ des scalaires. On considère l'équation (10.1) avec $b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Si pour tout $i = 1\ldots n$, x_i vérifie $f(x_i) = b_i$, alors

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

est une solution de l'équation (10.1).

10.3 Projections, symétries

On suppose dans ce chapitre que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$.

Définition 10.35 (Projection)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **projection sur** F **parallèlement à** G est l'application

$$\begin{array}{rccl} p & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x_F. \end{array}$$

Proposition 10.36

La projection p sur F parallèlement à G est linéaire et

(i) $\operatorname{Ker} p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.

(ii) $p_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $p_{|G} = 0$.

(iii) $p \circ p = p$.

Remarque. Si on appelle q la projection sur G parallèlement à F, alors on a

(i) $p + q = \mathrm{Id}_E$,

(ii) $F = \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$,

(iii) $G = \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$.

Définition 10.37 (Projecteur)

On appelle **projecteur de** E tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie

$$p \circ p = p.$$

Proposition 10.38

Si p est un projecteur de E, alors c'est une projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Définition 10.39 (Symétrie)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **symétrie d'axe** F **et de direction** G est l'application

$$\begin{array}{rccl} s & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x_F - x_G. \end{array}$$

Proposition 10.40 (Lien entre projection et symétrie)

Soient p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie d'axe F et de direction G. Alors

(i) $s = 2p - Id_E$,

(ii) $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 10.41

La symétrie s d'axe F et de direction G est linéaire et

(i) $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$ et $G = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$.

(ii) $s_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{Id}_G$.

(iii) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 10.42

Si s vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, alors c'est une symétrie d'axe $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$ et de direction $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$.

Remarque. Un endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ s'appelle une **involution**.

10.4 Dimension des espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les x_i sont des vecteurs de E et les λ_i sont des scalaires de $\mathbb{K}$.

10.4.1 Familles de vecteurs

Définition 10.43

On dit que la famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est **liée** (ou que les vecteurs sont **linéairement dépendants**) s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Une famille qui n'est pas liée est composée de vecteurs **linéairement indépendants**. On dit qu'elle est **libre**.

Remarque. Dire qu'une famille est liée revient à dire que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition 10.44

Une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre si et seulement si pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1=\ldots=\lambda_n=0.$$

Définition 10.45

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ **engendre** E (ou que c'est une **famille génératrice** de E) si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des x_i :

$$\forall x\in E,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i.$$

Définition 10.46

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème et définition 10.47

Une famille de vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des x_i :

$$\forall x\in E,\ \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i.$$

Le n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ forme la famille des **composantes** (ou **coordonnées**) de x dans la base $(x_1,\dots,x_n)$.

Définition 10.48

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Sinon on dit qu'il est de **dimension infinie**.

Lemme 10.49

(i) Étant donnée $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$, la famille $(x_1, \dots, x_n, x)$ est aussi une famille libre de E.

(ii) Étant donnée $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on a

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème 10.50

Soient $p, q, n \in \mathbb{N}^*$. Étant données dans E

➢ une famille libre $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_p)$,

➢ une famille génératrice $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$,

il existe une base $\mathcal{B}$ de E de la forme

$$\mathcal{B} = (\ell_1, \dots, \ell_p, \ell_{p+1}, \dots, \ell_n)$$

avec $\ell_{p+1}, \dots, \ell_n \in \mathcal{G}$.

Remarque. Ce théorème a deux conséquences très utiles.

- Théorème d'existence de base : tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet une base.
- Théorème de la base incomplète : étant donnée une famille libre dans un ev E de dimension finie, on peut la compléter en une base de E.

Théorème 10.51

Le cardinal d'une famille libre de E est toujours plus petit que le cardinal d'une famille génératrice.

Théorème et définition 10.52

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont même cardinal, appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.

Remarque. Par convention la dimension de l'espace $\{0\}$ est 0.

Théorème 10.53

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

(i) Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

(ii) Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

10.4.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 10.54

Soit F un sev de E. Alors

(i) $\dim F \leqslant \dim E$,

(ii) $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

Théorème 10.55

Soit E un ev de dimension n. Soient F et G deux sev de E munis des bases respectives $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$. Alors on a équivalence entre

(i) $E = F \oplus G$,

(ii) $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.

Remarque. Ce théorème a deux conséquences intéressantes.
- En termes de dimensions, si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.
- En dimension finie, tout sev admet un supplémentaire.

Théorème 10.56 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux sev de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Remarque. Par conséquent, parmi les trois conditions suivantes, il suffit d'en établir deux pour montrer que $E = F \oplus G$:

(1) $F \cap G = \{0_E\}$,

(2) $F + G = E$,

(3) $\dim F + \dim G = \dim E$.

10.4.3 Applications linéaires

Théorème 10.57

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Étant donnée une famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F, il existe une unique application $u : E \to F$ telle que pour tout i, $u(e_i) = f_i$. De plus,
- u est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre,
- u est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.

Corollaire 10.58

Avec les notations précédentes, F est isomorphe à E si et seulement si $\dim F = \dim E = n$.

Remarque. Ceci permet d'établir un isomorphisme entre tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathbb{K}^n$.

Corollaire 10.59

Étant donnés E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, on a

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Définition 10.60 (Rang)

(i) Soient E un ev de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de u la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathrm{Im}\, u)$.

Notations. On note ces quantités $\mathrm{rg}\, \mathcal{F}$ et $\mathrm{rg}\, u$.

Proposition 10.61

Étant donnée $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on a

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}(u(e_1), \ldots, u(e_n)).$$

Théorème 10.62 (du rang)

Soient E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \mathrm{rg}\, u.$$

Corollaire 10.63

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux ev de même dimension finie. Alors on a équivalence entre

(i) u est injective,

(ii) u est surjective,

(iii) u est un isomorphisme.

10.4.4 Interprétation matricielle des applications linéaires

Représentation matricielle d'une famille de vecteurs et d'une application linéaire

Définition 10.64

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F. On appelle **matrice de la famille** $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{F}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} v_1 & \quad & v_j & \quad & v_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \\ f_i \\ \\ f_n \end{array} \end{array}$$

où les a_{ij} sont les composantes des v_j dans la base $\mathcal{F}$.

Définition 10.65

Soient
- ➢ E un espace vectoriel de base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$,
- ➢ F un espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$,
- ➢ $u \in \mathcal{L}(E, F)$

On appelle **matrice du u relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$** la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \quad & u(e_j) & \quad & u(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \\ f_i \\ \\ f_n \end{array} \end{array}$$

où

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

Remarque. Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Notation. Pour un endomorphisme, on note simplement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u)$$

Théorème 10.66

Soient $\mathcal{E}$ une base de E un espace de dimension p et $\mathcal{F}$ une base de F un espace de dimension n. Alors l'application

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque. En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})) = p \times n$.

Proposition 10.67

Soient E et F deux espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

Proposition 10.68

Soient E, F et G trois espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u).$$

Remarque. Avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_E(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_F(u(x))$, on retient la forme

$$Y = AX.$$

Remarque. Tous les résultats précédents peuvent s'interpréter dans le cas particulier où $E = F$ et établissent une correspondance bijective entre matrices carrées et endomorphismes.

Matrice de changement de base

Définition 10.69

Soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** (ou **matrice de changement de base**) de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$ et on note

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}).$$

Proposition 10.70

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ trois bases de l'espace vectoriel E. Alors on a

(i) $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E)$;

(ii) $P_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} P_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$;

(iii) $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ est inversible et $(P_{\mathcal{E},\mathcal{F}})^{-1} = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$.

Proposition 10.71 (Changement de base pour un vecteur)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E. Étant donné $x \in E$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(x) = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

Proposition 10.72 (Changement de base pour un morphisme)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F. Étant donné $u : E \to F$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}.$$

Proposition 10.73 (Changement de base pour un endomorphisme)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. Étant donné $u : E \to E$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}.$$

Remarque. Avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$, on retient la forme

$$A' = P^{-1}AP.$$