Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Forme algébrique

3.1.1 Introduction

Définition 3.1

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés **nombres complexes** et qui vérifie les propositions suivantes :

(i) $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ et les opérations d'addition et de multiplication y sont préservées.

(ii) $\mathbb{C}$ contient un élément i dont le carré vaut -1.

(iii) Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$.

Définition 3.2

Étant donné un nombre complexe z, l'écriture $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ s'appelle **forme algébrique** de z. x s'appelle **partie réelle** de z et y est sa **partie imaginaire**, notées respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
Les nombres complexes de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ sont appelés **imaginaires purs**. On note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.

3.1.2 Calculs, conjugaison, module

Proposition 3.3

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors

- $z = z' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$,
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$,
- $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

Définition 3.4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z le nombre $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 3.5

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\overline{z}} = z$.

Étant donnés deux nombres complexes z et z', on a
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$,

Proposition 3.6

- On peut exprimer les parties réelle et imaginaire de z par :

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

- Cela a pour conséquence que
  - ➢ z est réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$,
  - ➢ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$,

Définition 3.7

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **module** de z le nombre *réel positif*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposition 3.8

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \in \mathbb{R}_+$. Et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z||z'|$,
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$: c'est l'*inégalité triangulaire.*

Proposition 3.9

Pour tout nombre complexe z, on a $z\overline{z} = |z|^2$.

Utilisation. Pour exprimer un nombre sous forme algébrique, il faut commencer par se débarrasser des imaginaires au dénominateur en multipliant par le conjugué :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Proposition 3.10

Tout nombre complexe non nul possède un inverse : si $z = a + ib \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Remarque. Une formule souvent utile : $\dfrac{1}{i} = -i$.

3.1.3 Interprétation géométrique

Définition 3.11

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. À tout complexe $z = x + iy$, on peut associer un point du plan ayant pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, ainsi qu'un vecteur du plan, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Proposition 3.12

- Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\lambda\overrightarrow{u}$ ont pour affixes respectives $z + z'$ et λu.
- Le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque. La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ traduit la relation $z_C - z_A = (z_C - z_B) + (z_B - z_A)$.

Proposition 3.13

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si M est le point d'affixe z, alors $|z| = OM$.
- Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'affixe z, alors $|z| = \|\overrightarrow{u}\|$.
- Si A et B sont deux points du plan, alors $AB = |z_B - z_A|$.

3.1.4 Résolution d'équations du second degré

Proposition 3.14

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes et opposées.

Théorème 3.15

Étant donnés trois nombres complexes $a \neq 0$, b et c, on étudie l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{3.1}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

(i) Si $\Delta = 0$, l'équation (3.1) a une unique solution : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

(ii) Si $\Delta \neq 0$, on appelle δ une racine carrée de Δ. Alors l'équation (3.1) a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Remarque. Si a, b et c sont réels, Δ l'est aussi. L'équation (3.1) a alors des solutions réelles si $\Delta \geqslant 0$ et complexes conjuguées si $\Delta < 0$.

Proposition 3.16

Avec les notations ci-dessus (z_1 et z_2 éventuellement confondues),

- on a la factorisation
$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$
- on a les relations
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

3.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

3.2.1 Exponentielle complexe

Définition 3.17

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, appelé **cercle unité** ou **cercle trigonométrique** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Proposition 3.18

- $1 \in \mathbb{U}$,
- Si $z, z' \in \mathbb{U}$, alors $zz' \in \mathbb{U}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

Définition 3.19

Soit $z \in \mathbb{U}$ et M le point d'affixe z dans le plan complexe.
– L'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$ s'appelle **un argument** de z, noté $\mathrm{Arg}(z)$.
– Si θ désigne un argument de z, alors on note $e^{i\theta} = z$.
– Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit le **cosinus** et le **sinus** de θ par

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}).$$

Définition 3.20

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** de z par

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Proposition 3.21

- Étant donnés deux nombres complexes z et z', on a $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.
- Étant donnés θ et μ deux réels, on a
  (i) $e^{i\theta} = e^{i\mu}$ si et seulement si $\theta = \mu \bmod 2\pi$,
  (ii) $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Proposition 3.22 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 3.23 (Formule de De Moivre)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

3.2.2 Argument et forme trigonométrique

Théorème et définition 3.24

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z. Et alors

(i) ρ est unique : c'est le module de z,

(ii) θ est un argument de z.

Proposition 3.25

Étant donnés deux nombres complexes z et z', on a (à 2π près) les égalités suivantes :

- $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$,
- $\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z'$ et $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$,
- $\operatorname{Arg}(\frac{z}{z'}) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z'$.

3.2.3 Interprétation géométrique

Proposition 3.26

Soit $z \in \mathbb{C}$.

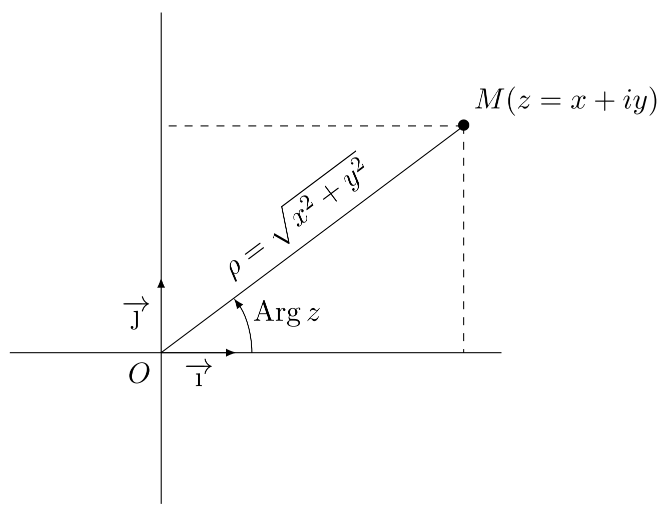
- Si M est le point d'affixe z, alors $\operatorname{Arg} z$ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
- Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'affixe z, alors $\operatorname{Arg} z$ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{u})$.
- Si A et B sont deux points du plan, alors $\operatorname{Arg}(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB})$.
- Si A, B C et D sont deux points du plan, alors $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Proposition 3.27

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes z et z'. Alors

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z}{z'}$ est réel. De plus, ils sont de même sens si et seulement si ce quotient est positif.
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z}{z'}$ est imaginaire pur.

Géométrie	Complexes (algébrique)	Complexes (trigonométrique)
Plan	Nombres complexes	
Point M	Affixe $z = x + iy$	Affixe $z = \rho e^{i\theta}$
Abscisse x	Partie réelle	
Ordonnée y	Partie imaginaire	
Axe (Ox)	Nombres réels	
Axe (Oy)	Imaginaires purs	
Symétrique / (Ox)	Complexe conjugué	
$OM = \Vert\overrightarrow{OM}\Vert$	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$\lvert z\rvert$
AB		$\lvert z_B - z_A\rvert$
Cercle unité	$x^2 + y^2 = 1$	$\lvert z\rvert = 1$
$(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$		$\operatorname{Arg}(z)$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$		$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$



3.2.4 Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

Définition 3.28

Dans $\mathbb{C}$, on appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

Notation. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Théorème 3.29 (expression des racines de l'unité)

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est fini, comporte exactement n éléments et

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{k}{n}2\pi},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Remarque. En notant $\omega = e^{2i\pi/n}$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k,\, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\right\}.$$

Proposition 3.30

Pour tout $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Proposition 3.31

Tout nombre complexe non nul a possède exactement n racines n-ièmes. Si $a = \rho e^{i\theta}$, ce sont les nombres

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

3.3 Transformations du plan

3.3.1 Généralités et transformations usuelles

On notera $\mathscr{P}$ le plan complexe.

Étant donnée une application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

on appelle **représentation (analytique) complexe** de F l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de son image M' par F. On note en général $z' = f(z)$.

Proposition 3.32

(i) La représentation complexe de la symétrie orthogonale d'axe (Ox) (respectivement (Oy)) est

$$z' = \overline{z} \quad (\text{resp. } z' = -\overline{z}).$$

(ii) Étant donné un $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathscr{P}$ d'affixe b, la représentation complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est

$$z' = z + b.$$

(iii) Étant donnés $\lambda \in \mathbb{R}$ et Ω un point de $\mathscr{P}$ d'affixe ω, la représentation complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est

$$z' - \omega = \lambda(z - \omega), \ i.e. : z' = \omega + \lambda(z - \omega).$$

(iv) Étant donnés un angle $\theta \in \mathbb{R}$ et Ω un point de $\mathscr{P}$ d'affixe ω, la représentation complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega), \ i.e. : z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Remarques.

- On peut aussi écrire la représentation complexe d'une homothétie sous la forme

$$z' = \lambda z + (1-\lambda)\omega,$$

et celle d'une rotation sous la forme

$$z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

- En particulier une homothétie de centre O s'écrit $z' = \lambda z$ et une rotation de centre O s'écrit $z' = e^{i\theta} z$.

3.3.2 Similitudes

Définition 3.33

On appelle **similitude directe** une application $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ qui a une représentation complexe de la forme

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Proposition 3.34

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- Étant donnés quatre points M_1, M_2, M_1' et M_2' du plan tels que $M_1 \neq M_2$, il existe une unique similitude directe S telle que $S(M_1) = M_1'$ et $S(M_2) = M_2'$

Proposition 3.35

Soit S la similitude directe de représentation complexe $z' = az + b$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe b.

- Si $a = 1$, alors S est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
- Si $a \neq 1$, alors S possède un unique point fixe Ω. On peut alors écrire

$$S = h \circ r = r \circ h$$

avec h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$ et r la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \arg a [2\pi]$.