Chapitre 5

Équations différentielles linéaires

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas réduit à un singleton.

5.1 Primitives

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étant donné $a \in I$, on pose

$$F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t \end{array}.$$

Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Définition 5.2

Soient $f, F : I \to \mathbb{R}$. On dit que F est **une primitive** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I et que $F' = f$.

Proposition 5.3

Soit F est dérivable sur I. Alors

$$F' = 0 \Leftrightarrow F \text{ est constante.}$$

Proposition 5.4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I. Alors $G : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si et seulement si $G - F$ est constante.

Proposition 5.5

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et F et G deux primitives de f et g respectivement. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Théorème 5.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors f admet des primitives sur I. Étant donné $a \in I$ l'unique primitive F_a qui s'annule en a est définie par

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Théorème 5.7 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Théorème 5.8 (Intégration par parties)

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}\,t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Théorème 5.9

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ une fonction dont la dérivée est continue sur I. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\alpha, \beta \in J$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}\,u.$$

Définition 5.10 (Primitives de fonctions complexes)

(i) Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On appelle **partie réelle** et **partie imaginaire** de f les applications $\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$.

(ii) On dit que f est **dérivable** en $x \in I$ si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont et on pose

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x).$$

5.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Proposition 5.11 (Caractérisation de l'exponentielle)

Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f : x \mapsto e^{ax}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et vérifiant $y(0) = 1$.

5.2.1 Vocabulaire

Définition 5.12 (Généralités)

On appelle **équation différentielle** une équation du type

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et F est une fonction à $n + 2$ variables. Une **solution sur** I de cette équation est une fonction f définie et n fois continûment dérivable sur I qui vérifie

$$\forall x \in I,\ F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

Définition 5.13

Étant données deux fonctions a et b définies sur I, on appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** une équation différentielle du type

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{E}$$

La quantité $b(x)$ est le **second membre** de l'équation. S'il est nul, on dit que l'équation est **homogène**. Si a et b sont constantes, on dit que l'équation est **à coefficients constants**.

Notation. Étant donnée l'équation différentielle (E), l'équation homogène associée sera souvent notée (E_0) (ou plus rarement (E_H)) :

$$y' + a(x)y = 0. \tag{E_0}$$

Définition 5.14 (Solutions)

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est appelée **solution sur** I de l'équation (E) si elle est dérivable sur I et qu'elle vérifie

$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

Résoudre ou **intégrer** l'équation différentielle (E) sur I, c'est donner toutes ses solutions sur I. Une **courbe intégrale** de l'équation est la courbe représentative d'une de ses solutions.

5.2.2 Résolution générale

Théorème 5.15

Soit a une fonction continue sur I et A une primitive de a sur I. Les solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto ke^{-A(x)}$$

où $k \in \mathbb{C}$ est une constante quelconque.

Remarques.

- La fonction nulle est toujours solution d'une équation différentielle homogène.
- On dit que l'ensemble des solutions est une *droite vectorielle* dirigée par $x \mapsto e^{-A(x)}$.

Proposition 5.16

Si f_1 et f_2 sont deux solutions de l'équation homogène (E_0), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de (E_0).

Théorème 5.17 (Structure affine)

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée.

Théorème 5.18 (Principe de superposition des solutions)

Soient f_1 et f_2 solutions respectives des équations linéaires du premier ordre $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$ sur l'intervalle I et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors $\alpha f_1 + \beta f_2$ est solution sur I de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x).$$

5.2.3 Gestion du second membre

Théorème 5.19

Soient A une primitive de a et B une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ sur I. Alors la solution générale de (E) sur I s'écrit

$$x \mapsto (B(x) + k)e^{-A(x)}$$

où $k \in \mathbb{C}$ est une constante quelconque

Remarques.

- Il s'agit de la méthode de *variation de la constante* qui permet de trouver les solutions de (E) en faisant ≪ varier la constante ≫ dans les solution de (E_0).
- Il sera souvent plus simple de trouver une solution évidente, suggérée par l'énoncé ou par la forme du second membre.

5.2.4 Problème de Cauchy

Définition 5.20

On appelle **problème de Cauchy du premier ordre** la donnée d'une équation différentielle linéaire du premier ordre et d'une condition initiale. Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$, résoudre un tel problème c'est trouver toutes les solutions f de l'équation (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Théorème 5.21

Étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

5.3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

5.3.1 Vocabulaire

Définition 5.22

Étant donnés trois nombres complexes a, b et c avec $a \neq 0$, on appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = u(x). \tag{$E2$}$$

où u est une fonction continue sur I constituant le **second membre** de l'équation. Si elle est nulle, on dit que l'équation est **homogène** :

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{$E2_0$}$$

Définition 5.23 (Solutions)

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est appelée **solution sur** I de l'équation $(E2)$ si elle est deux fois dérivable sur I et qu'elle vérifie

$$\forall x \in I,\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = u(x).$$

Résoudre ou **intégrer** l'équation différentielle $(E2)$ sur I, c'est donner toutes ses solutions sur I.
Une **courbe intégrale** de l'équation est la courbe représentative d'une de ses solutions.

5.3.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 5.24 (Résolution dans $\mathbb{C}$)

Étant donnée l'équation homogène $(E2_0)$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, on étudie l'équation caractéristique

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (EC)$$

et on appelle Δ son discriminant.

(i) Si $\Delta \neq 0$, soient α et β les deux solutions complexes de (EC). Alors les solutions de $(E2_0)$ sont les fonctions
$$x \mapsto Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$
où $A, B \in \mathbb{C}$ sont des constantes quelconques.

(ii) Si $\Delta = 0$, soit α la solution complexe de (EC). Alors les solutions de $(E2_0)$ sont les fonctions
$$x \mapsto (Ax + B)e^{\alpha x}$$
où $A, B \in \mathbb{C}$ sont des constantes quelconques.

Remarque. Dans le cas d'une équation à coefficients réels, les mêmes solutions restent évidemment valables. Cependant, souvent les solutions à valeurs réelles suffisent. Dans le cas où $\Delta < 0$ notamment, on peut préciser ces solutions.

Proposition 5.25

Soit l'équation homogène $(E2_0)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Si f est solution de $(E2_0)$, alors $\operatorname{Re} f$ est solution de $(E2_0)$.

Théorème 5.26 (Résolution dans $\mathbb{R}$)

Étant donnée l'équation homogène $(E2_0)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, on étudie l'équation caractéristique (EC) et on note Δ son discriminant.

(i) Si $\Delta > 0$, soient α et β les deux solutions réelles de (EC). Alors les solutions de $(E2_0)$ sont les fonctions
$$x \mapsto Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$
où $A, B \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

(ii) Si $\Delta = 0$, soit α la solution réelle de (EC). Alors les solutions de $(E2_0)$ sont les fonctions
$$x \mapsto (Ax + B)e^{\alpha x}$$
où $A, B \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

(iii) Si $\Delta < 0$, soient $\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$ les deux solutions complexes conjuguées de (EC). Alors les solutions de $(E2_0)$ sont les fonctions
$$x \mapsto e^{\lambda x}(k_1 \cos(\mu x) + k_2 \sin(\mu x))$$
où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

Remarque. Dans le cas $\Delta < 0$, on peut poser $k_1 + ik_2 = Ae^{-i\varphi}$ et dans ce cas les solutions s'écrivent
$$x \mapsto Ae^{\lambda x} \cos(\mu x + \varphi).$$
C'est une forme très employée en physique pour l'étude de signaux ondulatoires. Dans cette écriture, φ est la **phase**, A est l'**amplitude** du signal, μ est la **pulsation** et λ est le coefficient d'*amortissement* ou d'**amplification** (suivant son signe). Si ce dernier est nul le signal est **périodique** de période $\dfrac{2\pi}{\mu}$; sinon on dit qu'il est **pseudo-périodique**.

5.3.3 Résolution générale

Théorème 5.27 (Structure affine)

La solution générale de l'équation $(E2)$ est la somme d'une solution particulière de $(E2)$ et de la solution générale de l'équation homogène $(E2_0)$ associée.

Théorème 5.28 (Principe de superposition des solutions)

Soient f_1 et f_2 solutions respectives des équations linéaires du second ordre $ay'' + by' + cy = u_1(x)$ et $ay'' + by' + cy = u_2(x)$ sur l'intervalle I et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de l'équation différentielle
$$ay'' + by' + cy = \lambda u_1(x) + \mu u_2(x).$$

5.3.4 Gestion du second membre

Théorème 5.29 (Second membre polynomial)

Dans $(E2)$ on suppose que u est une fonction polynomiale de degré n.

(i) Si $c \neq 0$, alors il existe une unique solution particulière polynomiale de degré n.

(ii) Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors il existe une solution particulière polynomiale de degré $n+1$, unique au coefficient constant près.

(iii) Si $c = b = 0$, alors il existe une solution particulière polynomiale de degré $n+2$, unique à un terme affine près.

Théorème 5.30 (Produit polynôme-exponentielle)

Dans $(E2)$, on suppose que $u(x)$ est de la forme $P(x)e^{mx}$ avec P un polynôme de degré $n \in mN$ à coefficients complexes et $m \in \mathbb{C}$. Notons $P_{car}(X) = aX^2 + bX + c$. Alors $(E2)$ admet une solution particulière de la forme

$$x \mapsto R(x)e^{mx}$$

où R est une fonction polynomiale solution de

$$ay'' + P'_{car}(m)y' + P_{car}(m)y = P(x).$$

Remarque. On est alors ramené au cas précédent.

Théorème 5.31 (Second membre exponentiel)

Dans $(E2)$, on suppose que $u(x)$ est de la forme e^{mx} avec $m \in \mathbb{C}$. On note encore $P_{car}(X) = aX^2 + bX + c$. Alors $(E2)$ admet pour solution particulière :

- si $P_{car}(m) \neq 0$, $x \mapsto \dfrac{e^{mx}}{P_{car}(m)}$;
- si $P_{car}(m) = 0$ et $P'_{car}(m) \neq 0$, $x \mapsto \dfrac{xe^{mx}}{P'_{car}(m)}$;
- si $P_{car}(m) = P'_{car}(m) = 0$, $x \mapsto \dfrac{x^2e^{mx}}{2a}$.

5.3.5 Problème de Cauchy

Définition 5.32

On appelle **problème de Cauchy du second ordre** la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et de conditions initiales portant sur les solutions et leurs dérivées. Pour $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{C}$, résoudre un tel problème c'est trouver toutes les solutions f de l'équation $(E2)$ vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.

Théorème 5.33

Étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx} \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$