Chapitre 4

Applications : théorie et fonctions usuelles

4.1 Généralités

4.1.1 Ensembles

Un **ensemble** peut être vu comme une collection d'objets, appelés **éléments**. Un des axiomes de la théorie des ensemble est l'existence d'un ensemble qui ne contient aucun élément, appelé **ensemble vide** et noté $\emptyset$.

Notation. On note $x \in E$ le fait qu'un objet x appartienne à un ensemble E.

Définition 4.1

On dit qu'un ensemble E est **inclus** dans un ensemble F et on note $E \subset F$ si

$$\forall x \in E, x \in F.$$

On dit aussi que E est une **partie** de F.

Notation. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.

Définition 4.2

Étant données deux parties A et B d'un ensemble E, on définit

(i) la **réunion** $A \cup B$ par

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)\,;$$

(ii) l'**intersection** $A \cap B$ par

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)\,;$$

(iii) le **complémentaire** $\complement A$ par

$$x \in \complement A \Leftrightarrow x \notin A.$$

On dit que A et B sont **disjointes** si leur intersection est vide.

Proposition 4.3

Étant données 3 parties A, B et C d'un ensemble E, on a

(i) $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$;
(ii) $\complement(\complement A) = A$;
(iii) $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$;
(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(vi) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
(vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Remarque. À l'aide de ces relations, on peut encore définir la **différence** : $A \backslash B = A \cap \complement B$ et la **différence symétrique** : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Définition 4.4

Étant donnés deux ensembles E et F, on définit l'**ensemble produit** $E \times F$ par

$$E \times F = \{(x, y),\, x \in E, y \in F\}.$$

4.1.2 Applications

Définition 4.5

Soient E et F deux ensembles non vides. Une **fonction** ou **application** f de E vers F est une correspondance qui à tout élément $x \in E$ associe un unique élément de F, noté $f(x)$.
Si $y = f(x)$, on dit que y est **l'image** de x et que x est un **antécédent** de y par f.
E s'appelle **ensemble de définition** ou **ensemble de départ** de f et F son **ensemble d'arrivée**.
On définit le **graphe** de f comme la partie $G_f = \{(x, f(x)),\, x \in E\}$ de $E \times F$.

Notation. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Exemples.

- On appelle **identité de** E l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E,\, \mathrm{id}_E(x) = x.$$

  Son graphe est appelé **diagonale** de $E \times E$.
- Soit $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** de A l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E,\, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Définition 4.6

Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$.

(i) Si $f : E \to F$, on appelle **restriction** de f à A l'application $f|_A : A \to F$ définie pour tout $x \in A$ par $f|_A(x) = f(x)$.

(ii) Si $g : A \to F$, on dit que $f : E \to F$ est un **prolongement** de g à E si $g = f|_A$.

Définition 4.7

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle **composée** de f et g et on note $g \circ f$ l'application $x \mapsto g(f(x))$ de E dans G.

Définition 4.8

Soit $f : E \to F$. On dit que

(i) f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent ;

(ii) f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un anétécédent ;

(iii) f est **bijective** si tout élément de F adment exactement un antécédent.

Remarques.

- Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.
- On utilise le plus souvent cette caractérisation de l'injectivité :

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

ou parfois sa contraposée.

Théorème et définition 4.9

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \ \text{ et } \ f \circ g = \mathrm{id}_F \,.$$

Cette application est appelée **bijection réciproque** de f et notée f^{-1}.

Remarque. C'est l'application de F dans E qui a tout élément y de F associe son unique antécédent par f :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Proposition 4.10

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
(i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
(ii) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
(iii) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
(iv) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
(v) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
(vi) Si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque. Évident mais pas anodin : par conséquent, la composée de deux bijections est une bijection.

Définition 4.11

Soit $f : E \to F$.
(i) Étant donnée $A \subset E$, on appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

(ii) Étant donnée $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Remarque. . Si f est bijective, l'image réciproque de B par f coïncide avec l'image directe de B par la bijection réciproque f^{-1}. Mais la notation $f^{-1}(B)$ reste valable même si f n'est pas bijective et dans ce cas, parler de l'application f^{-1} n'a bien sûr aucun sens.

4.2 Fonctions réelles

Dans toute la suite la notation $f : D \to \mathbb{R}$ désigne une application dont l'ensemble de définition D est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion de tels intervalles. Le cas échéant, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, dont l'équation cartésienne est $y = f(x)$.

4.2.1 Parité, périodicité, bornes

Définition 4.12

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ telle que D soit centré en zéro. On dit que f est
(i) **paire** si $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
(ii) **impaire** si $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition 4.13

L'application $f : D \to \mathbb{R}$ est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x).$$

Lorsqu'elle existe, la plus petite période strictement positive de f s'appelle **la période** de f.

Proposition 4.14

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ avec $f(D) \subset D'$. Alors on peut définir la fonction composée $g \circ f$ et
- si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire ;
- si f est impaire et g est paire alors $g \circ f$ est paire ;
- si f est paire alors $g \circ f$ est paire.

Définition 4.15

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est
(i) **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D},\ f(x) \leqslant M$,
(ii) **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D},\ f(x) \geqslant m$,
(iii) **bornée** si elle est majorée et minorée.

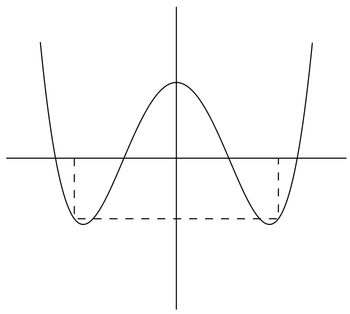
Proposition 4.16

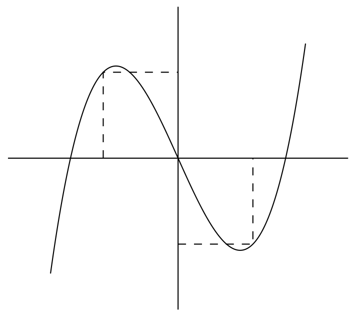
Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

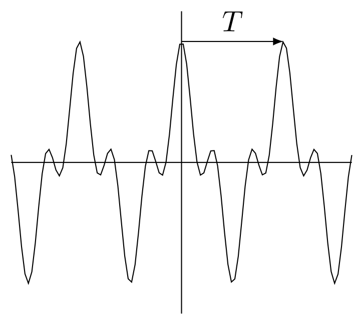
4.2.2 Représentation graphique

Proposition 4.17

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
- Si f est paire, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si f est paire, alors le graphe de $x \mapsto f(x-a)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$.
- Si f est impaire, alors le graphe de $x \mapsto f(x-a)+b$ est symétrique par rapport au point $\Omega(a,b)$.
- Le graphe de $x \mapsto f(x-a)+b$ est l'image de celui de f par la translation de vecteur (a,b).
- Si f est T-périodique, alors le graphe de f est invariant par la translation de vecteur $(T,0)$.


fonction paire


fonction impaire



fonction périodique

Proposition 4.18

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est
➢ continue sur I,
➢ strictement monotone sur I,
alors
- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$,
- dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

4.2.3 Dérivation

Définition 4.19

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable en** $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

Proposition 4.20

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors la tangente en a à $\mathscr{C}_f$ a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Définition 4.21

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point $a \in I$. Dans ce cas, on définit la **fonction dérivée** de f, notée f' ou $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}$ par

$$f' : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

Théorème 4.22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Proposition 4.23

Soient f, g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
- $f + g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$,
- fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$,
- λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$,
- si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,

Proposition 4.24 (Composée)

Étant données deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, si f et g sont dérivables, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Proposition 4.25 (Réciproque)

Soit $f : I \to J$ une fonction admettant une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$.
- Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a) \in J$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.
- Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

4.3 Fonctions usuelles

4.3.1 Fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 4.26

On appelle **fonction polynomiale** une fonction du type $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \neq 0$, on dit que f est de **degré** n.

Proposition 4.27

Les fonctions polynomiales sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$.

Définition 4.28

Une fonction rationnelle est définie comme le quotient de deux fonctions polynomiales.

Remarque. En particulier, elle est définie sur $\mathbb{R}$ privé des zéros du dénominateur.

Proposition 4.29

Une fonction rationnelle est continue et dérivable sur son ensemble de définition et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Proposition 4.30

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction polynomiale (resp. rationnelle) sont celles de son terme de plus haut degré (resp. du quotient de ses termes de plus haut degré).

4.3.2 Exponentielle

Théorème et définition 4.31

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, notée exp et appelée **exponentielle**, telle que

$$\begin{cases} \exp(0) = 1, \\ \exp' = \exp\,. \end{cases}$$

Remarque. Cette définition traduit ce que l'on appelle couramment une « croissance exponentielle ».

Proposition 4.32

- Équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$.
- exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Notation. On pose $e = \exp(1)$ et on note $e^x = \exp(x)$.

4.3.3 Logarithme népérien

Définition 4.33

La fonction **logarithme népérien** notée ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, définie sur $]0, +\infty[$.

Proposition 4.34

- La fonction ln est strictement croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

- Limites : $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Équation fonctionnelle : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

4.3.4 En base quelconque

Définition 4.35

- Étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit l'**exponentielle de base** a sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a).$$

- Étant donné un nombre réel $a > 0$ avec $a \neq 1$, on définit le **logarithme de base** a sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Remarque. Ceci définit les puissances dans le cas d'exposants irrationnels :

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Remarque. La fonction $\log_a$ est identique à la fonction ln, à une constante multiplicative près. Notamment $\log_a(a) = 1$. Le logarithme népérien est simplement le logarithme de base e.

Proposition 4.36 (Exponentielle)

Soit $a > 0$.

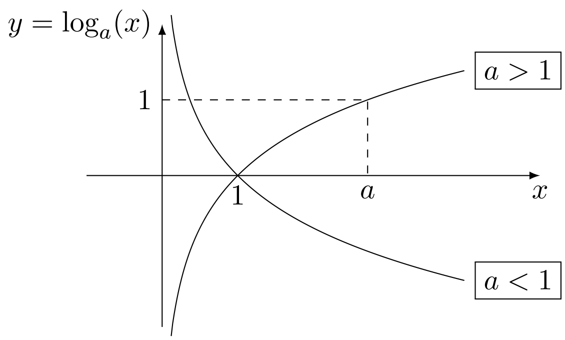
(i) La fonction $\exp_a$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

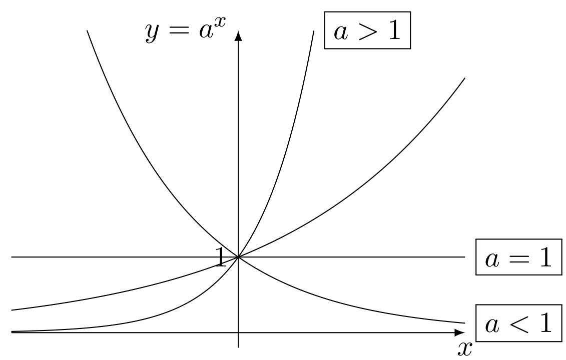
(ii) $\exp_a' = (\ln a)\exp_a$. Autrement dit, si $f(x) = a^x$, alors $f'(x) = (\ln a)a^x$.

(iii) La fonction $\exp_a$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$.

(iv) La fonction $\exp_a$ est
- ➢ strictement croissante si $a > 1$,
- ➢ strictement décroissante si $a < 1$,
- ➢ constante égale à 1 si $a = 1$.

(v) $f : x \mapsto a^x$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(1) = a$.





Proposition 4.37

Si $a > 0$ et $a \neq 1$, les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont des bijections réciproques.

Proposition 4.38 (Limites aux bornes)

Valeur de a	$a < 1$	$a > 1$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$	0	$+\infty$

Valeur de a	$a < 1$	$a > 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \log_a x$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x$	$-\infty$	$+\infty$

4.3.5 Puissances

Définition 4.39

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction **puissance** α par

$$p_\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x}. \end{array}$$

Proposition 4.40

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) La fonction p_α est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

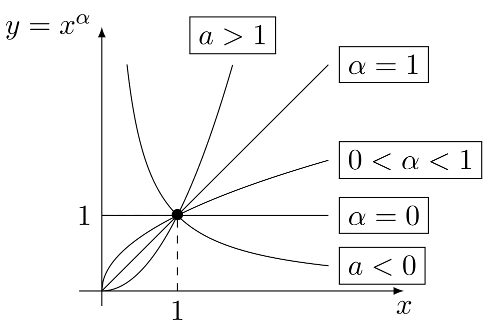
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(iii) La fonction p_α est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha > 0$.

(iv) La fonction p_α est
- ➢ strictement croissante si $\alpha > 0$,
- ➢ strictement décroissante si $\alpha < 0$,
- ➢ constante égale à 1 si $\alpha = 0$.

(v) Propriétés algébriques : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$



Proposition 4.41 (Limites aux bornes)

Si $\alpha = 0$, alors p_α est constante égale à 1. Dans les autres cas, on a

Valeur de α	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha$	0	$+\infty$

Remarque. On peut aussi étudier des fonctions puissances composées, du type $f(x) = u(x)^{v(x)}$. Si u et v sont dérivables sur un intervalle I et que u est strictement positive sur I, alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x) + u(x)^{v(x)}v'(x)\ln(u(x)).$$

4.3.6 Croissances comparées

Proposition 4.42

- On a les limites en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0.$$

- On a les limites en 0 :

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0.$$

Remarque. Les mêmes limites sont valables en base quelconque :
- Si $\alpha > 0$ et $b > 1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log_b x = 0.$$

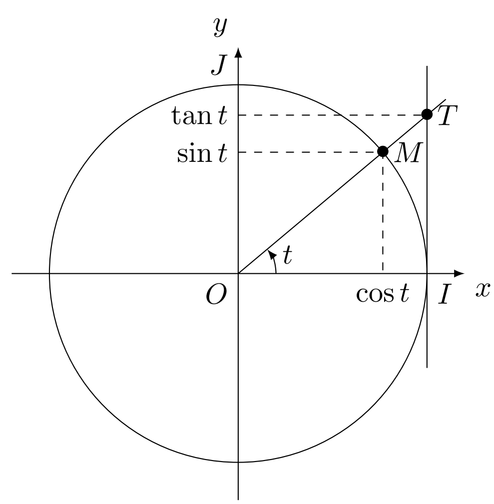
- Si $\alpha < 0$ et $0 < b < 1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = 0.$$

4.3.7 Fonctions circulaires directes

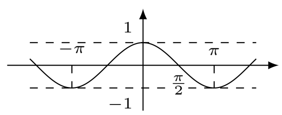
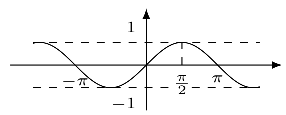
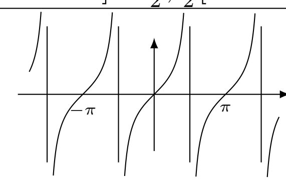
Définition 4.43

- On définit les fonctions **cosinus** et **sinus** de la manière suivante. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}$ étant le cercle trigonométrique, on place un point sur $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{\imath},\overrightarrow{OM}) = t$. On appelle alors $\cos(t)$ et $\sin(t)$ l'abscisse et l'ordonnée de M.
- On note T le point d'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en I. On appelle **tangente** de t l'ordonnée de T, notée $\tan t$.



Proposition 4.44

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

cos	sin	tan
$\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$	$\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$	$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
paire	impaire	impaire
2π-périodique	2π-périodique	π-périodique
$\cos'(x) = -\sin(x)$	$\sin'(x) = \cos(x)$	$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
strictement décroissante sur $[0, \pi]$	strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
		

4.3.8 Fonctions circulaires réciproques

Définition 4.45

La restriction de la fonction sinus à $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. On appelle **arc sinus** son application réciproque $\sin^{-1}$ définie sur $[-1, 1]$ et notée Arcsin.

Proposition 4.46

(i) La fonction Arcsin est continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$.

(ii) La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Définition 4.47

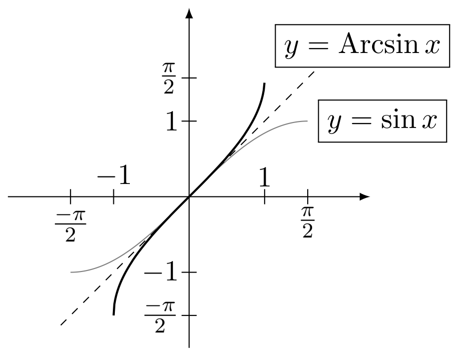
La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ est continue et strictement décroissante. On appelle **arc cosinus** son application réciproque $\cos^{-1}$ définie sur $[-1, 1]$ et notée Arccos.

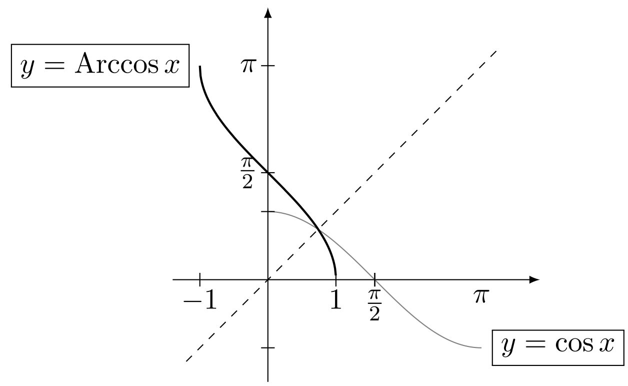
Proposition 4.48

(i) La fonction Arccos est continue, strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

(ii) La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$





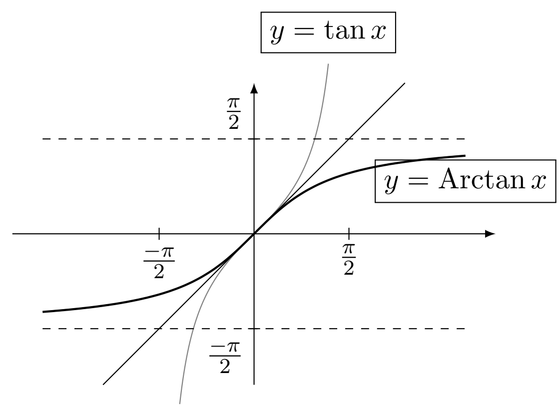
Définition 4.49

La restriction de la fonction tangente à $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. On appelle **arc tangente** son application réciproque $\tan^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et notée Arctan.

Proposition 4.50

La fonction Arctan est continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



4.3.9 Fonctions hyperboliques

Définition 4.51

(i) On appelle **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\mathrm{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

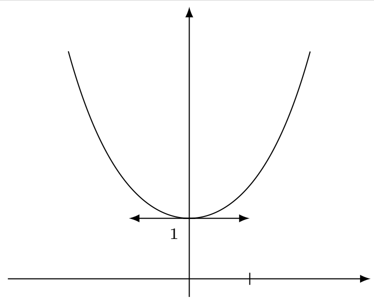
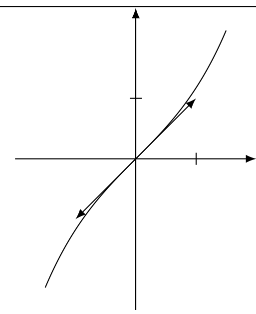
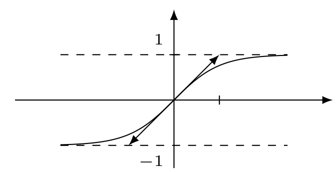
(ii) On appelle **tangente hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}.$$

Proposition 4.52

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

ch	sh	th
$\mathcal{D}_{\mathrm{ch}} = \mathbb{R}$	$\mathcal{D}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$	$\mathcal{D}_{\mathrm{th}} = \mathbb{R}$
paire	impaire	impaire
$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$
strictement croissante sur $[0, +\infty]$	strictement croissante sur $\mathbb{R}$	strictement croissante sur $\mathbb{R}$
		

Proposition 4.53

La courbe de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{2}$ est asymptote en $+\infty$ aux courbes de ch et sh et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh} x \leqslant \frac{e^x}{2} \leqslant \operatorname{ch} x.$$