Chapitre 9

Étude des fonctions réelles

9.1 Étude locale des fonctions réelles

On considère ici des fonctions définies sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Notation. $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

9.1.1 Limites, continuité

Définition 9.1

Soit f une fonction définie sur D. Soient $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, a étant un élément ou au bord de D. On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ lorsque x tend vers a** et on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ si,

- pour $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

- pour $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$,

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > M,$$

- pour $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$,

$$\forall M > 0,\ \exists A \in D,\ \forall x \in D,\ x > A \Rightarrow f(x) > M,$$

- pour $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in D,\ \forall x \in D,\ x < A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque. On peut encore écrire cinq autres définitions dans les autres cas pour a et ℓ. Il est indispensable de savoir le faire.

Proposition 9.2 (Unicité de la limite)

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Notation. On peut donc noter $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Définition 9.3

Soient f définie sur D et $a \in D$.

(i) On dit que f est **continue en** a si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

(ii) On dit que f est **continue sur** D si elle est continue en tout $a \in D$.

Remarque. On peut donc traduire cette définition en termes mathématiques : f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 9.4 (À droite et à gauche)

Soient f définie sur D et $a \in \overline{D}$.

(i)
- Si $a \neq \mathrm{Inf}(D)$, on dit que f admet une **limite à droite** en a si $f|_{D\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en a.
- Si $a \neq \mathrm{Sup}(D)$, on dit que f admet une **limite à gauche** en a si $f|_{D\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en a.

(ii)
- Si $a \neq \mathrm{Inf}(D)$, on dit que f est **continue à droite** en a si $f|_{D\cap [a,+\infty[}$ est continue en a.
- Si $a \neq \mathrm{Sup}(D)$, on dit que f est **continue à gauche** en a si $f|_{D\cap]-\infty,a]}$ est continue en a.

Notations. On note de préférence $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell$, mais on peut aussi rencontrer les notations $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{a^+} f = f(a^+)$.

Proposition 9.5

f est continue en $a \in D$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

9.1.2 Opérations

Définition 9.6

Soit f définie sur D.

(i) Soit $a \in \overline{D}$. On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ **au voisinage de** a s'il existe $\eta > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ en tout $x \in D$ si $|x-a| < \eta$.

(ii) Supposons que $+\infty$ est au bord de D. On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ **au voisinage de** $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ en tout $x \in D$ si $x > A$.

Remarque. Il existe bien sûr la même définition si l'on se place au voisinage de $-\infty$.

Désormais f et g désignent deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$. Les limites considérées s'entendent en un point de leur ensemble de définition ou au bord de ce dernier.

Proposition 9.7

(i) Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a.

(ii) Si $f \underset{a}{\to} \ell > 0$, alors il existe $m > 0$ tel que $f > m$ au voisinage de a.

Proposition 9.8 (Ordre)

Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\to} \ell_1$ et $g \underset{a}{\to} \ell_2$, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Remarque. En particulier, si $f \leqslant b$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\to} \ell$, alors $\ell \leqslant b$.

Théorème 9.9 (Gendarmes)

(i) Si $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a et $g, h \underset{a}{\to} \ell$, alors $f \underset{a}{\to} \ell$.

(ii) Si $g \leqslant f$ au voisinage de a et $g \underset{a}{\to} +\infty$, alors $f \underset{a}{\to} \infty$.

Théorème 9.10 (Opérations algébriques)

Soient f, g deux fonctions définies sur D et $a \in \overline{D}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$. Alors

(i) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$,

(ii) $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1\ell_2$,

(iii) $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |\ell_1|$.

(iv) avec $\ell_1 \neq 0$, $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1/\ell_1$

Théorème 9.11 (Composition)

Si $f \underset{a}{\to} b$ et $g \underset{b}{\to} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

Corollaire 9.12

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Théorème 9.13 (Caractérisation séquentielle)

$f \underset{a}{\rightarrow} \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarque. On utilise surtout la contraposée pour démontrer qu'une fonction est discontinue en un point.

Corollaire 9.14

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et f est continue en a, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Théorème 9.15 (Variations)

Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) et croissante au voisinage de b. Alors
soit f est majorée au voisinage de b, alors elle admet une limite finie en b,
soit $f \underset{b}{\rightarrow} +\infty$.

Remarque. On a un résultat similaire avec une fonction décroissante, en remplaçant la majoration par une minoration, et $+\infty$ par $-\infty$.

9.1.3 Fonctions continues

Définition 9.16

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{C}(I)$ l'**algèbre des fonctions continues sur** I (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions qui sont continues en tout point de I).

Théorème 9.17 (Valeurs intermédiaires)

Si
- f est continue sur $[a, b]$,
- γ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(c)$.

9.1.4 Relations de comparaison

Définition 9.18

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D et $a \in \overline{D}$. Au voisinage de a,

(i) on dit que f est **dominée par** g si $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ est bornée au voisinage de a et on note $f = O(g)$.

(ii) on dit que f est **négligeable devant** g si $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\to} 0$ et on note $f = o(g)$.

(iii) on dit que f et g sont **équivalentes** si $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\to} 1$ et on note $f \sim g$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Les notations complètes sont de même $f = \underset{x\to a}{o}(g)$ et $f = \underset{x\to a}{O}(g)$.

Proposition 9.19

La relation $\sim$ est une **relation d'équivalence** sur les fonctions.

Théorème 9.20

Soient f et g deux fonctions réelles. Alors

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g).$$

Remarques.

- Dire $f(x) = o(1)$ revient à dire $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- Dire $f(x) \sim \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^*$ revient à dire $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
- Si $f = o(g)$ ou $f \sim g$, alors *a fortiori* $f = O(g)$.

Proposition 9.21 (Comparaison et limites)

Étant données deux fonctions réelles f et g,

$$\left.\begin{array}{r} f \sim g \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell;$$

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \text{ ou } f = O(g) \\ g \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f \xrightarrow[x\to a]{} 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \text{ ou } f = O(g) \\ f \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$$

Proposition 9.22

Soeint $f \sim u$ et $g \sim v$ définissant quatre fonctions réelles. Alors

(i) $fg \sim uv$;

(ii) si g et v ne s'annulent pas au voisinage de a, alors $\frac{f}{g} \sim \frac{u}{v}$;

(iii) si $f \geqslant 0$ au voisinage de a, alors $f^\alpha \sim u^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque. Attention !

- On ne somme pas d'équivalents.
- On ne compose pas les équivalents à gauche (en particulier on ne les passe pas au log ou à l'exponentielle).

Proposition 9.23 (Croissances comparées)

Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ avec $\alpha < \beta$. Alors

(i) En 0,

$$|\ln x|^\gamma = \underset{x \to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^\beta} = \underset{x \to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

(ii) En $+\infty$ avec $a > 1$,

$$(\ln x)^\gamma = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\alpha) \quad ; \quad x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}(a^x).$$

Remarque. Cela induit en particulier les règles bien connues sur les polynômes et fractions rationnelles.

Proposition 9.24 (Équivalents usuels)

(i) Si f est dérivable en $a \in D$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} (x - a)f'(a).$$

(ii) Équivalents en 0 :

- $e^x - 1 \sim x$;
- $\ln(1 + x) \sim x$;
- $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$;
- $\sin x \sim x$;
- $\tan x \sim x$;
- $\operatorname{sh} x \sim x$;
- $\operatorname{th} x \sim x$;
- $\operatorname{Arcsin} x \sim x$;
- $\operatorname{Arctan} x \sim x$;
- $\operatorname{argsh} x \sim x$;
- $\operatorname{argth} x \sim x$;

9.2 Dérivation des fonctions réelles

9.2.1 Dérivabilité

Définition 9.25

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ différent de $\inf I$ (resp. $\sup I$).

(i) On dit que f est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie à gauche (resp. à droite), appelée **nombre dérivé à gauche** (resp. **à droite**).

(ii) On dit que f est **dérivable en** a si elle est dérivable à gauche et à droite en a et que les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux. Dans ce cas, leur valeur commune est appelée **nombre dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

(iii) f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point $a \in I$. On peut alors définir sur I la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ appelée
demphfonction dérivée de f.

Remarque. Pour résumer, f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement admet une limite finie lorsque x tend vers a et on a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Définition 9.26

Étant donnés f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, on définit **la tangente** en A à $\mathscr{C}$ comme la droite $\mathcal{T}_a$ d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Remarque. Cette droite est (en un sens topologique qu'on ne précisera pas dans le cadre de ce cours) la limite quand x tend vers a des droites sécantes à $\mathscr{C}$ en A et un point M d'abscisse x.

Proposition 9.27 (Développement limité à l'ordre 1)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

(i) Si f est dérivable en a, alors on a, au voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a). \tag{9.1}$$

(ii) Réciproquement, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - f(a) - \alpha(x-a) = o(x-a)$, alors f est dérivable en a et on a $\alpha = f'(a)$.

Remarque. La condition (9.1) peut s'écrire

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

ou en introduisant une fonction ε qui tend vers 0 en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a), \\ f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Proposition 9.28

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque. On peut écrire la même propriété à gauche et à droite.

Proposition 9.29 (Calcul de dérivées)

Soient f et g dérivables en a et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;

(ii) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(iii) si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$;

(iv) si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$;

(v) si g est dérivable en $b = f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$;

(vi) si f est strictement monotone sur I et à valeurs dans J, on peut définir sur J sa fonction réciproque f^{-1}. Dans ce cas, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Théorème 9.30

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a qui n'est pas une borne de I. Si f présente un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

9.2.2 Dérivées successives

Définition 9.31

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note $f^{(0)} = f$.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $f^{(k-1)}$ définie. On dit que f est k **fois dérivable** sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable. On note alors $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, appelée **dérivée k-ième** de f.

(ii) f est **infiniment dérivable** si elle est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Si f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur I.

(iv) On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarques.

- On peut adapter ces définitions pour parler d'une fonction k fois (ou infiniment) dérivable en $a \in I$.

- Cependant, pour parler d'une fonction k fois dérivable en un seul point, l'existence de $f^{(k-1)}$ sur I tout entier est nécessaire.
- On écrit le plus souvent f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$.

Notations. On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on peut écrire simplement $\mathcal{C}^k(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Proposition 9.32

Soient $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

Théorème 9.33 (Leibniz)

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$). Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Remarque. Même si on ne peut donner ici aucune formule générale, on peut montrer que l'inverse d'une fonction $\mathcal{C}^k$ et la composée de deux fonctions $\mathcal{C}^k$ sont également de classe $\mathcal{C}^k$.

9.2.3 Étude globale des fonctions dérivables

Dans tout ce paragraphe, on donne $a < b$.

Théorème 9.34 (Rolle)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si
➢ f est continue sur $[a,b]$,
➢ f est dérivable sur $]a,b[$,
➢ $f(a) = f(b)$,
alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Les conséquences de ce théorème sont multiples. Parmi les plus connues et utiles, les deux résultats suivants.

Proposition 9.35

(i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f admet (au moins) $n+1$ zéros sur $[a,b]$. Alors f' admet (au moins) n zéros sur $]a,b[$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b]$. On suppose que f admet (au moins) $n+1$ zéros sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Théorème 9.36 (Accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si
- ➢ f est continue sur $[a, b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a, b[$,

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Proposition 9.37 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si
- ➢ f est continue sur $[a, b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a, b[$,
- ➢ $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$,

alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.