# Chapitre 11

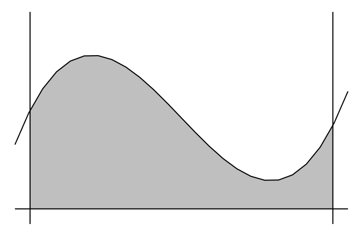
# Intégration

Dans tout le chapitre, $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

## 11.1 Fonctions en escalier

### 11.1.1 Introduction

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ positive. On cherche à calculer la surface comprise entre la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses. Le cas le plus simple est celui d'une fonction constante égale à $c$. Alors l'aire n'est autre que celle d'un rectangle, soit $(b-a)c$. Dans un cas moins favorable (ci-contre), on va chercher à approcher la surface grisée par des petits rectangles.




**Définition 11.1**

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escaliers** s'il existe une subdivision $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b$ telle que $f$ soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Dans ce cas, une telle subdivision est dite **adaptée** ou **subordonnée** à $f$.

**Notations.** On note $\mathscr{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.
**Exemples.** Les fonctions constantes, la fonction partie entière sont des fonctions en escalier.

### 11.1.2 Intégrale

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier.
On peut donc trouver une subdivision $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{N+1} = b$ telle que pour tout $1 \leqslant k \leqslant N$, $f$ est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$, égale à $y_k$.

**Définition 11.2**

On définit l'**intégrale entre $a$ et $b$ de $f$** par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{N} (a_{k+1} - a_k) y_k.$$

**Notation.** On notera parfois simplement $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

**Proposition 11.3**

- Soient $a < b < c$ et $f$ en escalier sur $[a, c]$. Alors
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \qquad \text{(Relation de Chasles)}$$
- Soient $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$. Alors
$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g. \qquad \text{(Linéarité de l'intégrale)}$$
- Soient $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $f \leqslant g$. Alors
$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g. \qquad \text{(Croissance de l'intégrale)}$$

## 11.2 Fonctions continues

### 11.2.1 Intégrale

Tout d'abord le résultat d'approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier.

**Proposition 11.4**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier distantes d'au plus $\varepsilon$ et qui encadrent $f$. Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi, \psi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R}), \begin{cases} \varphi \leqslant f \leqslant \psi, \\ \psi - \varphi \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

L'écart entre les intégrales de $\varphi$ et $\psi$ ainsi choisies est alors inférieur à $\varepsilon(b - a)$. En choisissant $\varepsilon$ assez petit, on peut avoir un encadrement aussi précis que l'on veut de l'aire sous la courbe représentative de $f$.

**Théorème et définition 11.5**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Soit $\mathcal{I}_-$ l'ensemble des intégrales de fonctions en escalier minorant $f$.
Soit $\mathcal{I}_+$ l'ensemble des intégrales de fonctions en escalier majorant $f$.
$\mathcal{I}_-$ est majoré donc admet une borne supérieure notée $M$. $\mathcal{I}_+$ est minoré donc admet une borne inférieure notée $m$.
Alors $m = M$, que l'on appelle **intégrale de $f$ sur** $[a, b]$. On définit ainsi

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f = m = M.$$

### 11.2.2 Propriétés

**Proposition 11.6 (Chasles)**

Soient $a < b < c$ et $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

**Proposition 11.7 (Linéarité)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}\,t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

**Proposition 11.8 (Positivité)**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue avec $f \geqslant 0$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t \geqslant 0.$$

**Corollaire 11.9 (Croissance)**

Soient $f$ et $g$ continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f \leqslant g$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

**Remarque.** On définit

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

**Théorème 11.10 (Stricte positivité)**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue avec $f > 0$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t > 0.$$

**Corollaire 11.11 (Stricte croissance)**

Soient $f$ et $g$ continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f < g$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

**Corollaire 11.12**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et de signe constant. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0 \Rightarrow f = 0.$$

**Théorème 11.13 (Moyenne)**

On a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}\,t.$$

**Remarque.** On a plus généralement

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |g| \int_a^b |f|.$$

**Théorème 11.14 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Étant données $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$,

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

### 11.2.3 Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On essaie d'approcher l'intégrale de $f$ à l'aide de fonctions en escalier de plus en plus précises. Pour tout entier positif $n$, on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en $n$ petits intervalles identiques $[a_k, a_{k+1}]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Pour cela, on pose $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $k \leqslant n$. On peut maintenant choisir d'approcher la fonction $f$ par des petits rectangles à gauche ou à droite.

**Définition 11.15**

Les **sommes de Riemann** $Sg_n(f)$ et $Sd_n(f)$ sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathrm{Sg}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \text{ et } \mathrm{Sd}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

**Théorème 11.16**

Les sommes de Riemann de $f$ forment des suites convergentes et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Sg}_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Sd}_n(f) = \int_a^b f.$$

On a des formules agréables quand l'intervalle d'étude est $[0, 1]$.

**Corollaire 11.17**

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

**Remarque.** L'utilité principale de ces résultats est de calculer des sommes qui font apparaître du $k/n$ à l'aide d'un simple calcul d'intégrale.

## 11.3 Formules de Taylor

**Théorème 11.18 (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors pour tous $a, x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

**Remarque.** Le polynôme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

est appelé **polynôme de Taylor** de $f$ de degré $n$ et la fonction $R_n$ définie par

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

est appelée **reste intégral**.

**Théorème 11.19 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Avec les notations ci-dessus et en appelant $M_{n+1}$ un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, x]$, on a

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

**Théorème 11.20 (Formule de Taylor-Young)**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, on ait

$$f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Autrement dit,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

## 11.4 Développements limités

### 11.4.1 Généralités

**Définition 11.21**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un point adhérent à $I$. On dit que $f$ admet un **développement limité en** $a$ **à l'ordre** $n$ si l'on peut écrire

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec

- $P$ un polynôme tel que $\deg P \leqslant n$, appelé **partie régulière** ou **principale** du développement,
- $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. La fonction $x \mapsto (x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelée **reste** du développement limité de $f$.

**Remarques.**

- On se limite dans toute la suite au cas $a = 0$. En effet, si $a \in \mathbb{R}^*$ on peut s'y ramener par le changement de variable $x \to x - a$. Et si $a = \pm\infty$, il suffit de poser $u = \frac{1}{x}$.
- Le théorème de Taylor-Young garantit l'existence d'un DL à l'ordre $n$ dès que la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$.

**Proposition 11.22 (Unicité)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL à l'ordre $n$. Alors la partie principale de ce DL est unique. C'est-à-dire que s'il existe des polynômes $P_1$ et $P_2$ de degré $n$ tels que

$$\forall x \in I,\ f(x) = P_1(x) + o(x^n) = P_2(x) + o(x^n),$$

alors $P_1 = P_2$.

**Corollaire 11.23**

- Si $f$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0, alors pour tout $p \leqslant n$, $f$ admet un DL à l'ordre $p$ en 0.
- Si $f$ est paire (respectivement impaire) et admet un DL en 0, alors ce DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

### 11.4.2 Opérations

**Proposition 11.24 (Somme, produit)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions admettant un DL à l'ordre $n$ en 0 :

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les fonctions $\alpha f + \beta g$ et $f \times g$ admettent un DL à l'ordre $n$ en 0 et

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \tag{11.1}$$

$$(f \times g)(x) = S(x) + o(x^n), \tag{11.2}$$

où $S$ est égal au produit $P \times Q$ privé de tous ses termes de degré (strictement) supérieur à $n$.

**Proposition 11.25 (Composition)**

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que
- ➢ $f$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 : $f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$,
- ➢ $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,
- ➢ $g$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 : $g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 dont la partie principale est constituée des termes de degré au plus $n$ dans le polynôme $Q \circ P$.

**Proposition 11.26 (Primitive)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$. On suppose que

➢ $f'$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 : $f'(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$,

➢ $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$.

Alors $f$ admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$f(x) = \ell + Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}),$$

avec $Q' = P$ et $Q(0) = 0$.

**Remarque.** Pas de résultat général sur la dérivée !

### 11.4.3 Développements limités usuels en 0

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})}$$