Chapitre 1

Éléments de logique

1.1 Assertions

On admet pour commencer qu'il existe exactement deux valeurs logiques : *vrai* et *faux*.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1

- On appelle **assertion** ou **proposition** toute déclaration susceptible d'être vraie (V) ou fausse (F).
- Un **axiome** est une proposition dont on admet la véracité et qui est à la base d'une théorie mathématique.
- Une **conjecture** est une assertion dont on soupçonne qu'elle est vraie sans pour autant pouvoir le démontrer.

Définition 1.2

La **démonstration** d'une assertion A est une succession (finie) de propositions dont la (les) premières sont établies (axiomes ou données), dont la véracité de chacune des suivantes se déduit des précédentes par un lien logique et dont la dernière est A.

1.1.2 Quantificateurs

Définition 1.3

Soit $A(x)$ une assertion dépendant d'une variable x.
- L'assertion $\forall x,\ A(x)$ est vraie si l'assertion $A(x)$ est vraie **quel que soit** l'objet x.
- L'assertion $\exists x,\ A(x)$ est vraie s'**il existe** un objet x tel que l'assertion $A(x)$ soit vraie.

Notation. On note $\exists! x,\ A(x)$ pour dire « il existe un unique x tel que $A(x)$ soit vraie ».

Définition 1.4

- Un **exemple** est un objet x particulier tel que $A(x)$ soit vraie.
- Un **contre-exemple** est un objet x particulier tel que $A(x)$ soit fausse.

1.1.3 Méthode de démonstration

Pour montrer une proposition du type $\forall x \in E,\ A(x)$,
- commencer par ≪ Soit $x \in E$. ≫,
- écrire une démonstration de l'assertion $A(x)$,
- conclure par ≪ On a donc montré que $\forall x \in E,\ A(x)$. ≫.

Exemple. Démontrer que tous les entiers naturels sont divisibles par 1.

Pour montrer une proposition du type $\exists x \in E,\ A(x)$,
- choisir judicieusement un élément $x_0 \in E$: ≪ Soit $x = x_0$. ≫,
- écrire une démonstration de l'assertion $A(x_0)$,
- conclure par ≪ On a donc montré que $\exists x \in E,\ A(x)$. ≫.

Exemple. Démontrer qu'il existe un entier supérieur à 28.

Combinaison de quantificateurs Bien évidemment on ne peut pas interchanger des quantificateurs ni changer l'ordre de quantificateurs différents.

Exemples.

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = 2x$ est .

(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = 2x$ est .

(3) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = 2x$ est .

Dans la suite, A, B et C désignent des assertions.

1.2 Négation

1.2.1 Défintion

Définition 1.5

On appelle **négation** ou **contraire de** A la proposition qui est vraie lorsque A est fausse et fausse lorsque A est vraie.

Notation. $\overline{A}$ (ou $\neg A$) désigne la négation de A.

Remarque. $\overline{\overline{A}} \equiv A$.

Pour écrire la négation d'une assertion,
- on change les $\exists$ en $\forall$ et inversement,
- on change les égalités en différences, les inégalités en inégalités contraires (les inégalités strictes deviennent larges et vice-versa).

Exemple.

Il existe un chat	dont **tous** les poils	sont **gris**.
↓	↓	↓
Tous les chats ont	**au moins un** poil	**pas gris**.

1.2.2 Méthode de démonstration

Pour montrer qu'une assertion est fausse, on montre que sa négation est vraie.

1.3 Opérations élémentaires

1.3.1 Définitions

Définition 1.6

Deux assertions sont dites **logiquement équivalentes** si elles prennent toujours la même valeur de vérité.

Notation. Deux assertions logiquement équivalentes sont notées $A \equiv B$.

Définition 1.7

On définit le **connecteur** ≪ **et** ≫ (noté $\wedge$) et le **connecteur** ≪ **ou** ≫ (noté $\vee$) par les tables de vérité suivantes.

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposition 1.8 (Règles de calcul)

- Principe du tiers exclu : $A \vee \overline{A}$ est toujours vraie et $A \wedge \overline{A}$ est toujours fausse.
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
- $\overline{(A \vee B)} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ et $\overline{(A \wedge B)} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

Remarque. $A \vee B \equiv \overline{(\overline{A} \wedge \overline{B})}$.

A	B				
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

1.3.2 Méthodes de démonstration

Pour démontrer une assertion du type ≪ A et B ≫,
- écrire une démonstration de l'assertion A,
- écrire une démonstration de l'assertion A
- conclure par ≪ On a donc montré que A et B. ≫.

Pour démontrer une assertion du type ≪ A ou B ≫,
- supposer l'assertion $\overline{A}$,
- écrire une démonstration de l'assertion B

- conclure par « On a donc montré que A ou B. ».

1.4 Implication

1.4.1 Définition

Définition 1.9

On définit l'**implication** $A \Rightarrow B$ (lire « A implique B ») par $\overline{A} \vee B$.

A	B		
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Remarque. Le faux implique tout (et n'importe quoi).

Théorème 1.10

- Si A est vraie et si $A \Rightarrow B$ est vraie, alors B est vraie.
- Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ sont vraies, alors $A \Rightarrow C$ est vraie.

1.4.2 Contraposée

Définition 1.11

On appelle **contraposée** de l'implication $A \Rightarrow B$ l'implication $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Proposition 1.12

Une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.

1.4.3 Méthodes de démonstration

Face à un énoncé du type

Montrer que si A alors B.

plusieurs méthodes possibles.

Méthode directe Pour montrer que $A \Rightarrow B$,
- commencer par « On suppose A. »,
- écrire une démonstration de l'assertion B,
- conclure par « On a donc montré que $A \Rightarrow B$. ».

Exemple. Soit n un entier. Démontrer que si n est impair, alors n^2 est impair.

Méthode par contraposée Pour montrer que $A \Rightarrow B$, on démontre que $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, ce qui est logiquement équivalent (prop. 1.4.2).
- Annoncer « On va montrer par contraposée que $A \Rightarrow B$ »,
- commencer par « On suppose $\overline{B}$. »,
- écrire une démonstration de l'assertion A,
- conclure par « On a donc montré (par contraposée) que $A \Rightarrow B$. ».

Exemple. Soit n un entier. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

1.4.4 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer une assertion A, on démontre que son contraire entraîne une absurdité :
- commencer par « On suppose $\overline{A}$. »,
- démontrer une assertion fausse B,
- conclure par « B étant fausse, on a démontré A par l'absurde. ».

Exemple. Montrer que $\forall x \neq -2, \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

1.5 Équivalence

1.5.1 Définitions

Définition 1.13

- On appelle **réciproque** de l'implication $A \Rightarrow B$ l'implication $B \Rightarrow A$.
- On définit l'**équivalence** $A \Leftrightarrow B$ (lire « A équivaut à B) par $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Théorème 1.14

- $A \Leftrightarrow B$ et $B \Leftrightarrow A$ sont logiquement équivalentes.
- Si $A \Leftrightarrow B$ et $B \Leftrightarrow C$ sont vraies, alors $A \Leftrightarrow C$ est vraie.

1.5.2 Méthode de démonstration

Sauf dans les cas les plus simples, pour démontrer que $A \Leftrightarrow B$,
- démontrer que $A \Rightarrow B$,
- démontrer que $B \Rightarrow A$,
- conclure par « On a donc montré que $A \Leftrightarrow B$. ».

Remarque. Si la situation s'y prête, pour démontrer directement $A \Leftrightarrow B$, on part de A, puis on écrit une succession d'assertions toutes équivalentes dont la dernière est B. L'équivalence doit être établie à chaque étape ; en particulier **PAS DE « DONC »**.

1.6 Autres types de raisonnements

1.6.1 Raisonnement par récurrence

Il s'agit de démontrer qu'une assertion dépendant d'un entier naturel n est vraie quelle que soit la valeur prise par cet entier.

Théorème 1.15 (Principe de récurrence simple)

Soit $A(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

(i) $A(0)$ est vraie,

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Utilisation. Pour démontrer $A(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- démontrer $A(0)$,
- écrire « Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $A(n)$. »,
- écrire une démonstration de $A(n+1)$,
- conclure par « On a donc démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A(n)$. ».

Remarque. Si on ne cherche à démontrer la propriété qu'à partir d'un certain rang, il suffit de remplacer « $n \in \mathbb{N}$ » par « $n \geqslant n_0$ ».

Théorème 1.16 (Principe de récurrence forte)

Soit $A(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

(i) $A(0)$ est vraie,

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A(0) \wedge A(1) \wedge \ldots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)$.

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Utilisation. Pour démontrer $A(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- démontrer $A(0)$,
- écrire « Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $A(k)$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. »,
- écrire une démonstration de $A(n+1)$,
- conclure par « On a donc démontré par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A(n)$. ».

Exemple. Tout nombre entier $n \geqslant 2$ peut se décomposer en produit de nombres premiers.

1.6.2 Démontrer existence et unicité

Pour démontrer une assertion du style « Il existe un unique x vérifiant la propriété P », on démontre séparément l'existence et l'unicité.
- Pour montrer l'existence, il suffit d'exhiber un x qui vérifie la propriété P. C'est le plus difficile en général. Plus rarement, on peut avoir recours à un théorème déjà démontré qui établit directement l'existence de l'élément x.
- Pour montrer l'unicité,
  - ➢ on commence par « Soient x_1 et x_2 qui vérifient la propriété P »,
  - ➢ on montre que $x_1 = x_2$.

Une autre technique est le raisonnement par **analyse-synthèse**. La partie analyse démontre l'unicité en trouvant l'élément x voulu **PUIS** la synthèse vérifie son existence. En pratique,

- on suppose qu'on a un résultat : « Analyse : soit x vérifiant la propriété P. »,
- on raisonne par conditions nécessaires pour en déduire qui est x : « Alors … Alors $x = \ldots$. »
- on vérifie que le x trouvé vérifie bien la propriété P : « Synthèse : soit $x = \ldots$. Alors … Alors x vérifie la propriété P.

Remarques.

- Si on regarde bien, on démontre en fait par double implication que

$$x \text{ vérifie la propriété } P \Leftrightarrow x = \ldots.$$

- Ce type de raisonnement s'étend à des questions du type « Déterminer tous les x vérifiant la propriété P ». On examine un x qui y répond, on trouve (analyse) par conditions nécessaires tous les candidats, puis on vérifie (synthèse) lesquels vérifient effectivement la propriété P.

Exemples.

- Déterminer tous les minima locaux de $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.
- Montrer que toute fonction réelle peut s'écrire de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.