# Chapitre 6

# Matrices et systèmes

## 6.1 Systèmes linéaires

### 6.1.1 Définitions

**Définition 6.1**

On appelle **système d'équations linéaires** un système du type

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, les scalaires $a_{ij}$ sont les **coefficients** du système.
- Les scalaires $b_i$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ forment le **second membre**. Si tous les $b_i$ sont nuls, on parle de **système homogène**
- Les $x_j$ pour $j \in [\![1,p]\!]$ sont les **inconnues** du système.

**Définition 6.2**

Avec les notations ci-dessus, on appelle **solution** du système $(S)$ tout $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ telles que toutes les équations de $(S)$ soient vérifiées.

- Un système admettant au moins une solution est dit **compatible**.
- Un système n'admettant aucune solution est dit **incompatible**.

### 6.1.2 Matrices

**Définition 6.3**

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** à $n$ lignes et $p$ colonnes une application

$$A : \begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \to & \mathbb{K} \\ (i,j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array}.$$

**Remarque.** Il s'agit simplement d'une famille de nombre indexée par deux indices
**Notations.** Une matrice se note

$$\begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

On dit qu'elle est de taille $n \times p$ ou $(n, p)$.

Le coefficient en place $(i, j)$ se note $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

**Notations.** Le système d'équations défini dans le premier paragraphe peut être représenté par la matrice $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, appelée **matrice des coefficients** ou **matrice du système**. Le second membre se note comme la matrice colonne $B = [b_i]_{i\in[\![1,n]\!]}$. On note alors le système complet de la manière suivante, appelée **matrice augmentée** du système.

$$(S) \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

### 6.1.3 Résolution d'un système

**Définition et proposition 6.4**

Étant donnés $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système linéaire (ou de sa matrice augmentée) une des opérations suivantes :

- **transvection** (addition d'une ligne à une autre ligne) : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$,
- **dilatation** (multiplication d'une ligne par un scalaire) : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
- **transposition** (échange de deux lignes) : $L_i \leftrightarrow L_j$.

**Définition 6.5**

(i) Deux systèmes linéaires sont dites **équivalentes** par lignes si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

(ii) Deux matrices sont dites **équivalentes** par lignes si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

**Définition 6.6**

Un système ou une matrice est dite **échelonnée** si elle vérifie les deux propriétés suivantes.

(i) Si une ligne est nulle, toutes les suivantes le sont aussi.

(ii) À partir de la deuxième ligne non nulle, le premier coefficient non nul est situé plus à droite que celui de la ligne précédente.

Ces coefficients ainsi que le premier de la première ligne, sont appelés les **pivots** du système ou de la matrice.

**Théorème 6.7 (Gauß)**

Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée.

**Remarque.** La démonstration de ce théorème est constructive et fournit un algorithme pour réaliser cette opération en pratique, également connu sous le nom d'algorithme de Gauß. Si l'on excepte le cas particulier où la première colonne est nul, le principe de cet algorithme est le suivant.

- Permuter les lignes de manière à obtenir un coefficient supérieur gauche (**pivot**) $a_{1,1}$ non nul.
- Pour tout $j \geqslant 2$ on annule le premier coefficient $a_{j,1}$ de la ligne $L_j$ en effectuant

$$L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} L_1$$

Pour la suite, on ne modifie plus $L_1$ et on réitère ces opérations avec le système formé par toutes les autres lignes (qui a également une colonne de moins). Enfin le processus s'arrête lorsqu'on a obtenu un système échelonné.

**Définition 6.8**

On appelle **rang** d'un système ou d'une matrice le nombre de ses pivots.

**Remarque.** Pour un système $n \times p$ compatible de rang $r$, on peut déterminer $r$ **inconnues principales**, associées aux pivots, et les $p - r$ autres, les **inconnues secondaires**. Chaque choix de valeurs fixées pour ces dernières détermine une unique solution.

**Définition 6.9**

(i) Un système $n \times p$ de rang $r$ échelonné est appelé **triangulaire**. Il en est de même pour sa matrice.

(ii) Un système équivalent à un système triangulaire est dit **de Cramer**.

**Proposition 6.10**

Un système de Cramer admet une unique solution.

**Proposition 6.11**

Les solutions d'un système linéaire sont la somme d'une solution fixée du système et de toutes les solutions du système homogène.

## 6.2 Calcul matriciel

### 6.2.1 Opérations matricielles

**Définition 6.12**

On définit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux opérations,
- l'addition de $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [A+B]_{i,j} = a_{ij} + b_{ij},$$

- la multiplication de $A = (a_{ij})$ par $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda a_{ij}$$

**Définition 6.13**

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on définit la **matrice élémentaire** $E_{ij}$ par

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [E_{ij}]_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \text{ et } l = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, la matrice $E_{ij}$ se représente de la manière suivante.

$$\begin{array}{ccc} & \text{colonne } j & \\ E_{ij} = & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$$

**Définition 6.14 (Symbole de Kronecker)**

Étant donnés $i, j \in \mathbb{N}$, on appelle **symbole de Kronecker** le nombre

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

**Définition 6.15 (Produit matriciel)**

Étant données $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ deux matrices, on définit le produit $C = AB \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}.$$

**Proposition 6.16**

Le produit de deux matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donne :

$$\forall i, j, k, l \in [\![1,n]\!],\ E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}.$$

**Définition 6.17**

On appelle **matrice identité** de taille $n$ la matrice $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

**Proposition 6.18**

Lorsqu'il est possible, le produit matriciel

- est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme,
- est associatif,
- admet la matrice identité pour élément neutre.

**Remarque.** Attention le produit matriciel n'est pas commutatif.

**Notation.** On note $A^k$ le produit de $k$ matrices toutes égales à $A$.

**Remarque.** Par convention, $A^0 = I_n$.

**Proposition 6.19**

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

(i) $(AB)^p = A^p B^p$,

(ii) $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

**Définition 6.20**

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la **transposée** de $A$, notée $A^\intercal$ ou ${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [{}^tA]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

**Proposition 6.21**

La transposition est linéaire, involutive et contravariante.

**Définition 6.22**

(i) On appelle **matrice symétrique** toute matrice carrée $A$ qui vérifie ${}^tA = A$.

(ii) On appelle **matrice antisymétrique** toute matrice carrée $A$ qui vérifie ${}^tA = -A$.

### 6.2.2 Matrices inversibles

**Définition 6.23**

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

**Notations.** La matrice inverse de $A$ est notée $A^{-1}$. On appelle groupe linéaire, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices inversibles de taille $n$.

**Théorème 6.24**

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est de rang $n$.

**Remarques.** Le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

peut s'écrire matriciellement $AX = B$ avec $A = (a_{ij})$, $X$ la matrice colonne des $(x_i)$ et $B$ la matrice colonne des $(b_i)$. Si $A$ est inversible, il admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.

Étant donné un système représenté par sa matrice $A$, on a équivalence entre

(i) $A$ est inversible,

(ii) $A$ est de rang $n$,

(iii) le système est de Cramer,

(iv) $AX = 0_n$ admet pour seule solution $X = 0_n$ (où $0_n$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$),

(v) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = Y$ admet une unique solution ($X = A^{-1}Y$).