

PROBABILITÉS

13.1 Espaces probabilisés

13.1.1 Expérience aléatoire

Définition 13.1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude. Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés **issues** et leur ensemble est l'**univers** des possibles, souvent noté Ω .

Un **événement** est un sous-ensemble de Ω dont on dit qu'il se produit ou non suivant l'issue de l'expérience.

Notation. Soit $A \subset \Omega$ un événement aléatoire. On dit que cet événement est réalisé si l'issue ω de notre expérience est un élément de A .

On a alors la correspondance suivante entre le vocabulaire des événements et celui des parties de Ω .

événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement élémentaire	singleton $\{\omega\}$
disjonction (A ou B)	$A \cup B$
conjonction (A et B)	$A \cap B$
événement contraire de A	$\overline{A}$
événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
système complet d'événements	partition

13.1.2 Loi de probabilité

Définition 13.2

Soit Ω un univers fini. $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ est une **loi de probabilité** si

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- $\forall A, B$ incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Dans ce cas, on dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé fini**.

Définition 13.3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Un événement A est dit **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$ et **négligeable** ou **presque impossible** si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Proposition 13.4

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A, B des événements. Alors

- (i) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- (ii) (inégalité de Boole) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,
- (iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
- (iv) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
- (v) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Théorème 13.5

Avec les mêmes notations et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

13.1.3 Probabilités conditionnelles**Théorème et définition 13.6**

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A, B des événements. Si $\mathbb{P}(B) = 0$, on pose $\mathbb{P}_B = \mathbb{P}$. Sinon, on définit

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Alors $\mathbb{P}_B$ est une loi de probabilité et $\mathbb{P}_B(A)$, aussi notée $\mathbb{P}(A|B)$, s'appelle la **probabilité conditionnelle de A sachant B** .

Proposition 13.7

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements incompatibles. Alors

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i|B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i|B\right).$$

En particulier, $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1$.

Théorème 13.8 (Formule des probabilités composées)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements (avec $n \geq 2$) tels que $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Remarque. En particulier, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$, ce qui n'est pas une grosse surprise au vu de la définition.

Théorème 13.9 (Formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Remarque. C'est simplement encore une autre manière de traduire la définition, cette fois dans la σ -additivité, puisque les $B \cap A_i$ forment une partition de B .

Corollaire 13.10

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B|\bar{A}).$$

Théorème 13.11 (Formule de Bayes)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ non nuls. Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque. On trouve une version générale de cette formule pour laquelle il suffit d'exprimer $\mathbb{P}(B)$ à l'aide de la formule des probabilités totales avec $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements : pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}.$$

13.1.4 Indépendance

Définition 13.12

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Proposition 13.13

Avec les notations ci-dessus, si A et B sont indépendants, alors

- A et $\bar{B}$ sont indépendants,
- $\bar{A}$ et B sont indépendants,
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants,
- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Définition 13.14

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On dit que des événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont

(i) **indépendants deux à deux** si

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j),$$

(ii) **mutuellement indépendants** si

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition 13.15

Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.

13.2 Variables aléatoires

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

13.2.1 Variable aléatoire réelle

Définition 13.16

On appelle **variable aléatoire réelle** (v.a.r.) sur Ω toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Son **ensemble de valeurs** est l'ensemble fini $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$.

Notations.

- Dans Ω , on note $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$.
- Plus généralement, si A est un sous-ensemble de $X(\Omega)$, on note $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$.

Théorème et définition 13.17

Soit X une v.a.r. sur Ω . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

est une loi de probabilités sur $X(\Omega)$, appelée **loi de la variable X** .

Remarque. Cela signifie que $X(\Omega)$ est un ensemble fini qui peut être vu comme un univers. Ses événements sont des parties $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$. Avec les notations ci-dessus, on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Proposition 13.18

Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $(X = x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements de Ω .

Proposition 13.19

$\mathbb{P}_X$ est déterminée de manière unique par les $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

13.2.2 Lois usuelles

Définition 13.20

On dit que la variable X à valeurs dans l'ensemble fini E suit une **loi uniforme** si

$$\forall x \in E, \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Définition 13.21

On dit que la variable X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \quad .$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition 13.22

On dit que la variable X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ si

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

13.2.3 n -uplets de variables et indépendance**Définition 13.23**

- (i) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement. On appelle **loi conjointe** des X_i la loi de la variable aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_n)$
- (ii) Soit $Z = (X_1, \dots, X_n)$ une v.a. à valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_n$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, on appelle k^{e} **loi marginale** de Z la loi de X_k .

Proposition 13.24

Soit $Z = (X_1, \dots, X_n)$ une v.a. à valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_n$. Alors la loi marginale de X_1 est donnée par $\mathbb{P}_Z(A \times E_2 \times \dots \times E_n) = \mathbb{P}_{X_1}(A)$ pour tout événement $A \subset E_1$.

Définition 13.25

Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour tous $A_1, \dots, A_n$ événements de $E_1, \dots, E_n$ respectivement,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Remarque. On peut, comme pour les événements, définir l'indépendance deux à deux de variables aléatoires. Cette notion n'est pas équivalente à la précédente sauf dans le cas fréquent de deux variables aléatoires où une caractérisation de l'indépendance est la suivante.

Proposition 13.26

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toutes valeurs x et y ,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Proposition 13.27 (Transfert)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et F respectivement et soient $f : E \rightarrow E'$ et $g : F \rightarrow F'$. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Proposition 13.28

La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

13.2.4 Espérance, variance**Définition 13.29**

L'**espérance** d'une variable aléatoire X à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x).$$

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite **centrée**.

Proposition 13.30

L'espérance d'une v.a.r. X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Proposition 13.31

Soient X et Y deux v.a.r. et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

- $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y)$,
- si X est à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Définition 13.32

La **variance** d'une variable aléatoire X à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ est

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

et son **écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Une variable centrée dde variance égale à 1 est dite **réduite**.

Proposition 13.33

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Proposition 13.34

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$,
- si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Proposition 13.35 (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X) \geq a \mathbb{P}(X \geq a)$.

Théorème 13.36 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.