Chapitre 12

Séries numériques

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

12.1 Définitions

Définition 12.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le nombre S_n est appelé somme partielle d'ordre n de la série.

Notations. On note cette série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Définition 12.2

- On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie $S \in \mathbb{K}$ quand n tend vers $+\infty$. On appelle alors **somme de la série** ce nombre S.
- Si la suite des sommes partielles diverge, on dit que la série est **divergente**.

Notation. Dans le cas d'une série convergente, on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

Remarque. Attention à ne pas confondre les notations. Malgré l'immuable présence du signe sigma, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ désigne la série de terme général u_n ; c'est une suite et cela n'a aucun rapport avec sa somme, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui, lorsque la série converge, est un nombre fini et avec lequel on ne peut écrire des calculs qu'après avoir établi son existence.

Définition 12.3

Étant donnée $\sum u_n$ une série qui converge vers S, le nombre

$$R_n = S - S_n = S - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelé **reste** d'ordre n. On écrit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

12.2 Propriétés

Proposition 12.4

Si $\sum u_n$ converge, alors la suite (R_n) des restes converge vers 0.

Proposition 12.5

Si $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Remarques.
- Cela implique que si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.
- Bien évidemment la réciproque est fausse.

Définition 12.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement** (ou **trivialement**).

Proposition 12.7 (Linéarité)

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors
- $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont des séries convergentes ;
- et les sommes suivent la propriété de linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque. En résumé, l'ensemble des séries convergentes (muni de l'addition des suites et de leur multiplication par un scalaire) forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; et l'application qui à une série convergente associe sa somme est linéaire.

Proposition 12.8 (Séries à valeurs complexes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $(\sum \operatorname{Re} u_n)$ et $(\sum \operatorname{Im} u_n)$ convergent. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n.$$

12.3 Séries de référence

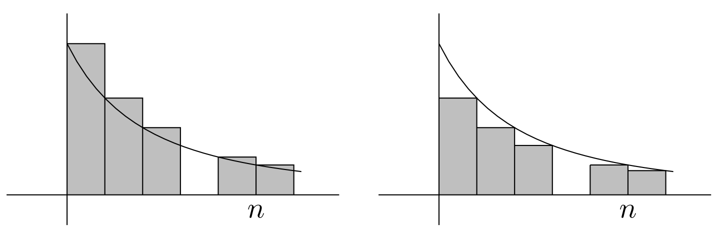
Proposition 12.9

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge si et seulement si $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Théorème 12.10 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Dans le cas où il est difficile de calculer la somme partielle, on peut, en présence de séries réelles positives de terme général décroissant, utiliser nos connaissances sur les intégrales grâce au critère de comparaison suivant.



Proposition 12.11 (Comparaison entre série et intégrale)

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante et $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \int_1^n f \text{ admet une limite finie.}$$

Théorème 12.12 (Critère de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

12.4 Comparaison de séries positives

Le premier critère revient à effectuer une comparaison par rapport à une série géométrique.

Théorème 12.13 (Critère de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

- Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge (grossièrement) ;
- Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge ;
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème 12.14 (Comparaison)

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs.

➢ Si on a $u_n \leqslant v_n$ àpcr ou $u_n = o(v_n)$, alors
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge,
- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

➢ Si on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.