DEVOIR MAISON N° 1

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
En DM, un travail efficace est un travail régulier sur la totalité du délai.

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

1. Donner le module et l'argument de z ainsi que ceux de z^2, z^3 et z^4.
2. On pose $\alpha = z + z^4$ et $\beta = z^2 + z^3$. Montrer que $\alpha^2 = 2 + \beta$.
3. Montrer que $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation $Z^2+Z-1 = 0$. Résoudre cette équation.
4. Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
5. En déduire une expression de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
6. On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points du plan complexe d'affixes respectives $1, z, z^2, z^3, z^4$. Soit H le point d'intersection entre (A_1A_4) et l'axe des abscisses. Montrer que $OH = \cos\frac{2\pi}{5}$.
7. Soient Ω le point d'affixe $-1/2$, B le point d'affixe i et $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω passant par B. $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en M d'abscisse positive et N d'abscisse négative.
   Montrer que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \beta\overrightarrow{u}$ et que H est le milieu de $[OM]$.
8. En déduire une méthode pour dessiner une étoile à 5 branches à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas seuls. Un petit dessin ?

Problème 1

On rappelle la définition de la factorielle : $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, avec la convention : $0! = 1$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Étant donné $n \geqslant 2$, étudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n-1}$ (on précisera notamment les abscisses de leurs éventuels points d'intersection).
   (c) Tracer sur un même graphique $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. (remarque : on privilégiera le respect de l'allure, des variations et des limites, des positions relatives et des intersections plutôt que de chercher à passer précisément par de nombreuses valeurs).
2. On définit dans cette partie la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = f_n(n).$$

   (a) En utilisant les résultats de la question 1, montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

(b) Étudier les variations et le signe de la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t) - t + t^2/4$. En déduire l'inégalité

$$\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t) \leqslant t - t^2/4.$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}.$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$$

(d) Montrer pour tout $n \geqslant 2$ que

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

Donner une interprétation graphique de cette inégalité.

(e) Montrer que $u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$ et en déduire la limite de la suite u_n.