DEVOIR MAISON N° 2

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
En DM, un travail efficace est un travail régulier sur la totalité du délai.

Exercice 1 **(Rattrap'cours)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i}$.

1. Calculer S_n pour $n = 1, 2, 3$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$.
3. Montrer que $S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ *(Indication : on pourra penser à séparer la somme de la question (2))*

Exercice 2

1. (a) Expliciter l'ensemble $\mathbb{U}_7$ des racines septièmes de l'unité.
   (b) Montrer que
   $$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{7}) + 2\cos(\frac{4\pi}{7}) + 2\cos(\frac{6\pi}{7}) = 0.$$
   (c) Exprimer $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.
   En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{7})$ est racine de l'équation
   $$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$
2. Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
   (a) Montrer que $B = \overline{A}$ et $\mathrm{Im}(A) > 0$.
   (b) Calculer $A + B$ et AB. En déduire A et B.
   (c) Exprimer $\mathrm{Re}(A)$ en fonction de $\cos(\frac{2\pi}{7})$ et retrouver 1b.
3. Montrer que
   $$\frac{\sqrt{7}-1}{6} < \cos(\frac{2\pi}{7}) < 1.$$

Problème 1 *(si $NOTE(DS1) < 10$)*

A Une similitude

On définit la fonction

$$f_0 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 3z - i \end{array}$$

1. Déterminer la transformation du plan complexe associée à la fonction f_0. On en donnera les éléments caractéristiques.
2. f_0 est-elle bijective ? Justifier.

B Une homographie

On définit sur $\mathbb{C}^*$ la fonction

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{3z-i}{z} \end{array}$$

3. Soit $b \in \mathbb{C}$. Déterminer, en fonction de sa valeur, le nombre d'antécédents de b par f_1.
4. En déduire un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée pour que f_1 réalise une bijection et donner l'expression de sa bijection réciproque.
5. Combien f_1 admet-elle de points fixes (c'est-à-dire de nombres z tels que $f_1(z) = z$) ? On ne cherchera pas à les déterminer.
6. Pour chacune des quatre réponses à venir, on donnera une description géométrique de l'ensemble solution.
   (a) Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $|f_1(z)| = 3$.
   (b) Déterminer $f_1^{-1}(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer $f_1^{-1}(i\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que $|f_1(z)| = 1 \Leftrightarrow |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ *(on pourra poser $z = x + iy$)*. En déduire $f_1^{-1}(\mathbb{U})$.

C Toujours plus haut

On définit sur $\mathbb{C}^*$ la fonction

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{3z-i}{-4z^2} \end{array}$$

7. Soit $b \in \mathbb{C}$. Déterminer, en fonction de sa valeur, le nombre d'antécédents de b par f_2.
8. Calcul des points fixes de f_2.
   (a) Déterminer une racine simple imaginaire pure de $4z^3 + 3z - i$.
   (b) En déduire toutes les solutions de $4z^3 + 3z - i = 0$.
   (c) Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $f_2(z) = z$.

Problème 2 *(si $NOTE(DS1) > 10$)*

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on note
- $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1,
- P le demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive,
- D le disque des nombres complexes de module strictement inférieur à 1.

Étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, on appelle **homographie** une application h qui, à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$, associe

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

A Exemple

Soit h l'homographie définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $h(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.

A.1 Montrer que $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $h(z) \in \mathbb{R}$.

A.2 Montrer que $\forall z \in D,\ h(z) \in P$.

A.3 Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.

A.4 Pour quelles valeurs de $w \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = w$ a-t-elle une solution dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$?

B Conservation du cercle unité

B.1 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}.$$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in U$.

B.2 Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\overline{\alpha} z + 1}.$$

Vérifier que h est bien définie sur $\mathbb{U}$ et montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}.$$

On dit que h **conserve** $\mathbb{U}$. On va maintenant montrer que seules les homographies des types ci-dessus conservent $\mathbb{U}$.

B.3 Deux petits résultats techniques utiles pour la suite.

B.3.a Montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)$. À la démonstration de quel théorème bien connu ce résultat est-il également utile ?

B.3.b Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\left(\forall \theta \in \mathbb{R},\ a + 2\operatorname{Re}(b e^{-i\theta}) = 0\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

B.4 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On pose h l'homographie définie sur $\mathbb{U}$ par

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

et on suppose que $\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}$.

B.4.a Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{a} b e^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{c} d e^{-i\theta})$.

B.4.b En déduire que $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \\ \overline{a} b = \overline{c} d \end{cases}$.

B.4.c Si $a = 0$, montrer que h est du type étudié à la question B.1.

B.4.d Si $a \neq 0$, montrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

B.4.e En distinguant les deux cas possibles, montrer que h est alors du type étudié à la question B.2.

B.5 Vous avez compris ce qu'on a fait ? Prouvez-le en énonçant le mieux possible le théorème que nous avons démontré dans cette partie B.