Devoir maison n° 5

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
En DM, un travail efficace est un travail régulier sur la totalité du délai.

Exercice 1 (Rattrap'cours)

Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $0 \leqslant \mathrm{E}(nx) - n\,\mathrm{E}(x) \leqslant n-1$.

   (b) En déduire que $\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = \mathrm{E}(x)$.

2. Soit $A = \left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

   (a) Donner un minorant et un majorant de A.

   (b) Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

   (c) A admet-il un minimum ? un maximum ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Effectuer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'étude de la fonction f_n en précisant ses valeurs en 0 et 1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in [0, 1[$ solution de $f_n(x) = 0$.
3. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$.
4. Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \leqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et en déduire les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Montrer que (α_n) converge vers une limite $\ell \in [0, 1[$.
6. On veut montrer que $\ell = 0$.

   (a) Supposons $\ell > 0$. En examinant $(\alpha_n^5 - 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(-n\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, établir une contradiction.

   (b) Calculer $f_n(\alpha_n)$ et retrouver que $\ell = 0$ d'une autre manière.

7. Montrer que $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
8. Montrer que $\alpha_n - \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^6}$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$. On pose $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que $\cos(I) \subset I$ et que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution sur I. On la notera α.
2. Soit $g : x \mapsto \cos(\cos(x)) - x$
   (a) Étudier sur I la fonction g (définition, dérivée, variations, signe).
   (b) Montrer que $g([0, \alpha]) \subset [0, \alpha]$ et que $g([\alpha, \frac{\pi}{2}]) \subset [\alpha, \frac{\pi}{2}]$.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+2} en fonction de u_n.
4. Soit $v_n = u_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $v_n \in [0, \alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est croissante et en déduire qu'elle converge vers une limite que l'on déterminera.
5. Soit $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En imitant le raisonnement effectué sur (v_n), montrer que (w_n) converge vers une limite que l'on déterminera.