PCSI Jacam *pour le 05/05/17, 15h30*

DEVOIR MAISON N° 7

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
En DM, un travail efficace est un travail régulier sur la totalité du délai.

Exercice 1 **(Rattrap'cours)**

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + y - z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner l'expression de f^{-1}.

Problème 1

On note $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et on considère E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_3[X]$ formé des polynômes qui admettent 2 pour racine au moins double.

1. Donner un élément de E de degré supérieur ou égal à 3.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En invoquant la division euclidienne par $(X - 2)^2$, montrer que tout élément de $\mathbb{R}_3[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme de E et d'un polynôme de degré au plus 1. En déduire que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
4. On définit l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(2), P'(2)) \end{array}.$$
   (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = E$.
   (c) Déterminer $\operatorname{Im} \varphi$.
5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par
$$f(1) = 1,\ f(X) = X^2,\ f(X^2) = X \text{ et } f(X^3) = X^3.$$
   (a) Donner l'image d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ?
6. Soient $S = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P\}$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = -P\}$.
   (a) Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$.
7. Soit $F = \operatorname{Vect}\{1 + X^3, X, X^2\}$.
   (a) Montrer que $A \subset F$.
   (b) Décrire les éléments de $F \cap S$.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Montrer que le polynôme nul est le seul polynôme qui vérifie $f(P) = \lambda P$.

Problème 2

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soient a et b deux réels, on note $F_{a,b} = \{(u_n) \in E, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0\}$.
On pose également $P_{a,b} = X^2 - aX - b$.

1. Montrer que $F_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère une suite géométrique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \lambda^n$. Montrer que si $(u_n) \in F_{a,b}$, alors λ est racine de $P_{a,b}$.
3. Montrer réciproquement que si λ est une racine de $P_{a,b}$ alors $u_n = \lambda^n$ appartient à F.
4. Dans cette partie, on suppose que les racines de $P_{a,b}$ sont distinctes, on les note λ_1 et λ_2.
   (a) Pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, justifier que la suite définie par $u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ appartient à F.
   (b) Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n est de la forme $C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ avec λ_1 et λ_2 à préciser.
   (c) En tenant compte des conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, calculer les valeurs de C_1 et C_2.
5. On suppose que $P_{a,b}$ possède une racine double que nous noterons λ.
   (a) Montrer que $u_n = n\lambda^n$ appartient à $F_{a,b}$.
   (b) En déduire que pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, la suite définie par $u_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n$ appartient à F.
   (c) Soient $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n.