Problème 1**Étude de fonction**

Soit f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$.

1. Étudier la parité de f .
2. (a) À l'aide d'un équivalent de sh en 0, déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
(b) Calculer la (ou les) limite(s) de f en 0.
3. Étudier la dérivabilité de f et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'expression de sa dérivée peut s'écrire

$$f'(x) = \left[\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right] \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right).$$

4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\operatorname{th}(a) < a$ et en déduire les variations de f .
5. (a) Établir le développement limité de sh en 0 à l'ordre 3.
(b) En déduire que f peut s'écrire, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

où α, β, γ sont des constantes à déterminer.

6. Montrer que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ peut se prolonger en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ que l'on appelle g .

D'y faire en ciel

On étudie l'équation différentielle

$$xy' + y = \operatorname{ch}(x) \tag{E}$$

7. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sans justifier ses solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
8. Montrer que (E) admet g pour unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

La suite

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution, notée a_n .
10. Étudier le sens de variation de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
11. Montrer que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
12. Établir un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$ (on pourra penser à utiliser des résultats la première partie).

Problème intégral

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = \int_{x/2}^x f(t)dt$.

On pourra utiliser sans démonstration que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(2x) = 2 \text{ch}(x) \text{sh}(x)$.

13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) \geq \frac{x}{2}$ et en déduire la limite de $I(x)$ en $+\infty$. On admettra que la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est en fait une asymptote à la courbe représentative de I .
14. En utilisant que $\forall x > 0$, $\text{sh}(x) > x + \frac{x^3}{6}$, montrer que $I(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.
15. Montrer que la fonction I est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$I'(x) = f(x) \left[1 - \frac{1}{2} \text{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \right].$$

16. Exprimer les points d'annulation de I' à l'aide de la fonction $\ln$ et déterminer les variations de I .
17. Esquisser une allure du graphe de I .

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier les matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire les matrices M qui « vérifient la relation (1) » :

$$M \times {}^tM = {}^tM \times M \quad (1)$$

Petite taille

Dans cette partie, on considère des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note en particulier $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et C vérifient la relation (1).
2. Calculer A^2 . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice représentative dans la base canonique (e_1, e_2) .

4. Exprimer $u(e_1)$ et $u(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2 .
5. Montrer que u est une symétrie et préciser l'ensemble de ses vecteurs invariants.

Dans la suite, on notera $U = A + C$ et E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_n \in \mathbb{R}, U^n = \alpha_n U.$$

En déduire que toutes les puissances de U vérifient la relation (1).

7. Calculer les produits de $A + C$ avec sa transposée. En déduire que E_2 n'est pas un espace vectoriel.
8. Étant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2 . On donnera les deux formes possibles de matrices de E_2 .
9. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun la dimension et une base.
10. Étant données deux matrices $M, N \in E_2$, a-t-on nécessairement $M \times N \in E_2$?

Taille moyenne

Pour cette partie, on se place dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note (u_1, u_2, u_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit h comme l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $h(u_1) = -u_3$, $h(u_2) = u_1$ et $h(u_3) = u_2$ et on appelle S sa matrice dans la base canonique.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1) est noté E_3 .

11. Donner la matrice S .
12. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3 .
13. Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3 .
14. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F .
15. Montrer que F est stable par la multiplication matricielle (c'est-à-dire que le produit de deux matrices de F est encore dans F).

Grande taille

On se place désormais dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on note (f_1, f_2, f_3, f_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On définit la matrice B par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

où a est un réel quelconque, et on appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont B est la matrice dans la base canonique.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1) est noté E_4 .

16. Déterminer les nombres $a \in \mathbb{R}$ tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite, on prendra $a = -1$.

17. Déterminer une base de $\text{Ker } u$ et de $\text{Im } u$.
18. Calculer $u(f_1 + f_2 - f_3 - f_4)$. Que remarque-t-on ?

19. Calculer les produits $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat.

20. Déduire des questions précédentes l'existence d'une matrice inversible P telle que $B = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale que l'on explicitera. On demande d'expliciter la matrice P mais pas son inverse.
21. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = PD^nP^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et B^2 .