DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 *(durée : 3 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

1. Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs.
   (a) La valeur absolue de tout réel est positive.
   (b) Le carré d'un réel positif est toujours supérieur à ce réel.
   (c) Si deux réels quelconques sont classés dans un certain ordre, leurs inverses sont toujours classés dans l'ordre inverse.
2. Les trois assertions ci-dessus sont-elles vraies ou fausses ? Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de celles qui sont fausses.

Exercice 2

On considère la proposition (P) :

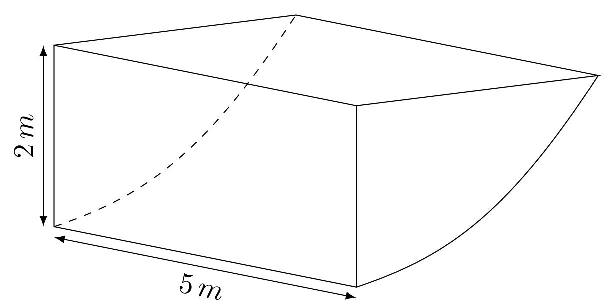
« Si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair. »

1. Écrire la contraposée de la proposition (P).
2. Montrer que si n est impair, alors il s'écrit $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{1, 3\}$.
3. En déduire que la contraposée de (P) est vraie.
4. A-t-on démontré la proposition (P) ?

Exercice 3

On étudie une cuve creusée dans le sol et suivant les contraintes suivantes (voir schéma ci-contre).

- Elle est délimitée par trois bords plans verticaux dont les deux opposés sont parallèles.
- Sa profondeur va de 0 à 2 mètres.
- Son profil latéral, identique sur toute sa largeur (5 mètres) suit le bord vertical de 2 mètres, une partie incurvée et naturellement la ligne horizontale du sol.



La partie courbe qui constitue le profil latéral de la cuve est modélisée par la fonction f, définie sur $[2, 2e]$ par

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étude de f.
   (a) Pourquoi f est-elle bien définie et dérivable sur $[2, 2e]$?
   (b) Exprimer sa dérivée, calculer ses valeurs aux bornes de l'intervalle, et dresser son tableau de variations.

(c) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 2$.

(d) Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 2e$ a pour équation

$$y = x + 2 - 2e.$$

(e) On pose $g(x) = f(x) - (x + 2 - 2e)$. À l'aide d'une étude des variations de g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $[2{,}2e]$.

(f) En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de sa tangente en $x = 2e$.

(g) Dessiner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ en faisant intervenir les éléments étudiés précédemment.

2. Volume de la cuve.

(a) Soit $h(x) = \dfrac{x^2}{2} \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4}$. Exprimer h'.

(b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $[e, 2e]$.

(c) Déterminer une expression du volume de la cuve étudiée.

Exercice 4

Un laboratoire étudie l'évolution d'une population de bactéries.
Dans le milieu étudié, la masse de ces bactéries progresse de 20% chaque jour.
Le protocole suivant est mis en place :

- On introduit dans un bac au début de l'expérience $1\,kg$ de bactéries.
- À la fin de chaque journée, à heure fixe, on prélève pour les étudier $100\,g$ de bactéries.

A Modélisation discrète

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse à M_n la masse (en grammes) de bactéries présente dans le bac à la fin de la n-ième journée de travail.

1. Justifier que la suite (M_n) est définie par $\begin{cases} M_0 = 1000 \\ M_{n+1} = 1{,}2M_n - 100 \end{cases}$.

2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n \geqslant 1000$.

   (b) Montrer que (M_n) est croissante.

3. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on note pour tout n : $v_n = u_n - \alpha$.

   (a) Déterminer α tel que (v_n) soit une suite géométrique.

   (b) Dans ce cas, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de la suite (u_n). Commenter.

B Modélisation continue

On choisit désormais de modéliser la masse (en kg) de bactéries par une fonction continue définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0{,}2t}},$$

où t représente le temps en jours depuis le début de l'expérience.

4. Vérifier que la valeur de $f(0)$ est cohérente.

5. Démontrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f(t) < 50$.
6. Déterminer le sens de variation de f.
7. Calculer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
8. Commenter.
9. Avec cette modélisation, à partir de combien de jours d'expérience la masse des bactéries aura-t-elle dépassé 30 kilogrammes ?

Exercice 5 **(de l'arithmétique qui n'en est pas)**

Montrer que si $m, n \in \mathbb{N}$ s'écrivent tous les deux comme sommes de deux carrés d'entiers ($m = a^2 + b^2$ et $n = c^2 + d^2$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{N}$), alors mn également.