PCSI Jacam *12/10/2016*

Devoir surveillé n° 2 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 **INFORMATIQUE : à rendre sur une feuille séparée après 50 minutes**

Toutes les questions sont indépendantes

1. La représentation des nombres entiers en machine se fait par **complément à deux**. En pratique, on rappelle que sur 8 bits par exemple, la représentation d'un entier $n \geqslant 0$ est composé d'un bit (le premier) égal à `0`, les suivants étant la représentation de n en base 2. Et la représentation d'un entier $n < 0$ se compose d'un bit égal à `1`, les suivants représentant le nombre $n + 2^7$ en base 2.
   (a) Donner les nombres représentés en machine par la séquence `00011010` et par l'octet `10100100`.
   (b) Donner la représentation en machine sur 8 bits du nombre 31 et du nombre -89.
2. Une banque souhaite réaliser d'importantes statistiques. Pour cela elle centralise les données suivantes. Pour chacun de ses 10 millions de clients, elle enregistre tout d'abord une fiche de renseignements personnels codée sur 512 bits ; puis chaque mois pendant 10 ans, elle enregistre le solde du compte sous forme d'un nombre entier codé sur 32 bits.
   (a) Le tout étant stocké sur un même disque dur, quel espace de disque, en octets, faut-il prévoir ?
   (b) De quel type de mémoire s'agit-il ?
3. Quelle est la réponse de Python à l'exécution de `2**4 + 25//2` ?
4. On a assigné une valeur à chaque variable `x` et `y`. Écrire une instruction ou une suite d'instructions qui permet d'échanger les valeurs de `x` et `y`.
5. On dispose de la liste `L=[2,7,9,3,8]`. Donner deux instructions différentes permettant d'afficher le nombre `8` en utilisant la liste `L` ?
6. Étant donné un nombre `N`, écrire une suite d'instructions en langage Python qui permet d'afficher `True` si ce nombre est pair et `False` s'il est impair ?
7. Un élève a exécuté en Python

```
>>> a = "Bonjour"
>>> print("a")
```

   Qu'a-t-il obtenu ?
8. Écrire une instruction ou une suite d'instructions qui calcule et affiche la somme des entiers de 1 à 28 inclus.
9. Quelles sont les réponses de Python dans chacun des cas suivants ?

```
>>> if 2+2>5:
        if 3+3>5:
            print("Bon")
        print("jour")
```

```
>>> if 2+2>5:
        if 3+3>5:
            print("Bon")
    print("jour")
```

Exercice 2 Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Linéariser $\sin^4 x$.
   (b) Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que
   (a) $\left|\dfrac{z-2}{z-i}\right| = 1$.
   (b) $\dfrac{z-2}{z-i} \in i\mathbb{R}$.
   (c) $\dfrac{z-2}{z-i} \in \mathbb{R}_+$.
3. On applique au plan complexe la rotation de centre O (centre du repère) et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Puis on applique l'homothétie de centre A d'affixe $2i-1$ et de rapport 2. Quelle transformation a-t-on effectuée sur l'ensemble du processus ?

Exercice 3

1. On considère tout d'abord l'équation
$$z^2 - 2z - i = 0, \tag{E}$$
où l'inconnue z est complexe.
   (a) Calculer le discriminant de l'équation (E) et déterminer ses racines carrées sous forme algébrique.
   (b) En déduire sous forme algébrique les solutions de (E).
2. On étudie maintenant l'équation
$$z^2 = 2z + e^{i\varphi}, \tag{E_φ}$$
où $\varphi \in [0{,}2\pi[$.
   (a) Calculer le discriminant Δ_φ de l'équation (E_φ) puis calculer le module et l'argument de Δ_φ.
   (b) Déterminer les racines carrées de Δ_φ sous forme exponentielle puis en déduire une expression des solutions de (E_φ).

Problème 1

Dans tout le problème, $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (pour $n \geqslant 1$). Étant donnés $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on appelle $S_n(z)$ la somme

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

En particulier, on remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S_1(z) = 1$.

1. (a) Donner la définition d'une racine n-ième de l'unité. Combien $\mathbb{U}_n$ comporte-t-il d'éléments ? Donner (sans démonstration) leur expression sous forme exponentielle.
   (b) Donner la forme algébrique des éléments de $\mathbb{U}_n$ pour $n = 2$, 3 et 4 et les représenter dans le plan complexe (sur trois figures distinctes).
   (c) Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Calculer $S_n(\omega)$.
2. Dans cette question, on s'intéresse au cas $n = 3$. On a alors $S_3(z) = 1 + z + z^2$. Déterminer les points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ du plan tels que $S_3(z) \in \mathbb{R}$.

3. Majoration du module
   (a) Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour le module des nombres complexes.
   (b) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a $|S_n(z)| \leqslant n$.
   (c) Existe-t-il un $z \in \mathbb{U}$ tel que cette borne soit atteinte ? Justifier.
4. Dans cette question, on pose $a = e^{i\frac{\pi}{n}}$ avec n entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $a \in \mathbb{U}_N$.
   (b) Montrer que $S_n(a) = \dfrac{2}{1-z}$.
   (c) Déterminer le module et l'argument de $S_n(a)$.
5. Dans cette question enfin, on cherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des $z \in \mathbb{U}$ tels que $|S_n(z)| = 1$.
   (a) Montrer que $(\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\} \subset \mathcal{E}$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $|S_n(z)| = 1$. Montrer que $|z^n - 1| = |z - 1|$. En déduire
   $$z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}.$$
   (c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Problème 2

Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels. Étant donné $1 \leqslant k \leqslant n$, on rappelle la définition des coefficients binomiaux :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Formule de Vandermonde

1. Démontrer la relation de Pascal : pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant m$ et $p \leqslant n$. Démontrer par récurrence sur n la formule de Vandermonde :
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.
4. On appelle $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \left(\binom{n}{k}\right)^2$. À l'aide du changement d'indice $k = n - i$, exprimer T_n en fonction de n.
5. En déduire que si n est impair, alors $\displaystyle\binom{2n}{n}$ est pair.

Sommes remarquables

On pose $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$, pour tous $n,p \in \mathbb{N}$.

6. Calculer $S_0(n)$.
7. L'objet de cette question est une nouvelle méthode pour calculer $S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} k$.
   (a) On pose $f(x) = ax^2 + bx$ Déterminer a et b pour que $f(x+1) - f(x) = x$.
   (b) En écrivant que $k = f(k+1) - f(k)$, en déduire $S_1(n)$ en fonction de n.
8. Une formule utile.
   (a) Montrer que $S_{p+1}(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} i^k$.
   (indication : on pourra tenter d'exprimer $(1+i)^{p+1}$ à l'aide de la formule du binôme)
   (b) En déduire que $S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n)$.
   (c) En déduire enfin que
   $$(n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n).$$
9. À l'aide de la formule ci-dessus, exprimer sous forme factorisée $S_2(n)$ et $S_3(n)$.
10. On pose $M_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$. *(on rappelle que* $\min(i,j)$ *vaut i si $i \leqslant j$ et vaut j sinon)*
   (a) Montrer que $M_n = \sum_{i=1}^{n} \left((n-i)i + \sum_{j=1}^{i} j \right)$.
   (b) En déduire M_n en fonction de n.