PCSI Jacam *23/11/2016*

Devoir surveillé n° 3 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

1. Donner (en justifiant) les valeurs suivantes dans leur forme la plus simple.
   (a) $\operatorname{Arccos}(\cos(-\frac{\pi}{6}))$,
   (b) $\cos(\operatorname{Arccos}(\frac{-\sqrt{3}}{2}))$,
   (c) $\operatorname{Arctan}(\tan(\frac{28\pi}{5}))$,
   (d) $\operatorname{Arcsin}(\sin(\frac{-\sqrt{2}}{2}))$,
   (e) $\operatorname{sh}(\ln(2))$.

Problème 1

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$A_f = \{x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$
$$B_f = \{x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$

1. Déterminer A_f et B_f dans chacun des cas suivants
   (a)
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$
   (b)
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x + x^3 \end{array}$$

Soit $f \in E$ une fonction que l'on suppose désormais **quelconque**.

2. Soit C une partie de $\mathbb{R}$. Définir $f^{-1}(C)$, l'image réciproque de C par f.
3. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A_f pour que f soit paire.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur B_f pour que f soit impaire.
4. Montrer que si f est injective, alors $A_f = \{0\}$.
5. Montrer que si f est monotone, alors $A_f \subset f^{-1}(f(\{0\}))$.
6. Soit $g \in E$.
   (a) Montrer que $A_f \subset A_{g\circ f}$.
   (b) Montrer que $B_f \cap f^{-1}(B_g) \subset B_{g\circ f}$.
   (c) Montrer que $A_f \cap A_g \subset A_{f+g}$.

Problème 2

Étude de la fonction réciproque de la fonction th.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

1. Montrer que th est bien définie puis, en étudiant ses variations, que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note argth (« argument tangente hyperbolique ») sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
3. Démontrer que argth est impaire.
4. Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer argth à l'aide de fonctions usuelles.

Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

6. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
7. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
8. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1$.
   (on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
9. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
10. Montrer que th est solution du problème posé.
11. Dans les questions (11a) à (11e), on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.
    On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
    (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
    (b) Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
    (c) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, aboutir à une contradiction.
    (d) Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » ?
    (e) Conclusion ?
12. Dans les questions (12a) à (12d), on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.
    En raisonnant comme pour les questions (11a) à (11e), on peut montrer (et on admettra donc ici) que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1.$$

    On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{argth}(f(x))$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = 2\,g(x)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ $g(2^n x) = 2^n\,g(x)$.

(b) Montrer que g est dérivable en zéro.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) converge vers $g'(0)$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $xv_n = g(x)$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que g soit la fonction $x \mapsto \lambda x$.

13. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Problème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le cosinus de z par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

et on appelle $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction cosinus complexe définie par $\Phi(z) = \cos z$.

Le but de ce problème est de définir une fonction arccosinus complexe qui serait au cosinus complexe ce que la fonction arccosinus usuelle est au cosinus réel.

A Préliminaire

1. Montrer que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

B Parties adaptées, exemples

Étant donnés deux ensembles non vides E et F, une fonction $f : E \to F$ et A une partie non vide de E, on appelle f_A la fonction $\begin{array}{rccc} f_A & : & A & \to & f(A) \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

On dit que A est une **partie adaptée** à f lorsque f_A est bijective.

On va maintenant étudier Φ sur différents sous-ensembles de $\mathbb{C}$ afin de déterminer un ensemble optimal où définir une réciproque.

2. Soit $A_1 = [0,\pi]$.
   Déterminer $\Phi(A_1)$, montrer que A_1 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_1}^{-1}$.
3. Soit $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0\}$.
   Déterminer $\Phi(A_2)$, montrer que A_2 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_2}^{-1}$.
4. Soit $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \pi \text{ et } \operatorname{Im} z < 0\}$.
   Déterminer $\Phi(A_3)$, montrer que A_3 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_3}^{-1}$.
5. Soit $A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
   On admet que A_4 est adaptée à Φ *(les courageux pourront se demander chez eux comment démontrer que l'union de parties adaptées dont les images sont deux à deux disjointes est encore une partie adaptée...ce n'est pas demandé ici car un peu technique et pas fondamental, cependant il est important pour la suite du problème de bien comprendre ce résultat admis)*
   Déterminer $\Phi(A_4)$ et déterminer $\Phi_{A_4}^{-1}$.

C Résolution de l'équation $\cos z = a$

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\cos z = a$ si et seulement si e^{iz} est solution d'une équation du second degré que l'on notera (E).
7. Montrer que (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes u_1 et u_2. Déterminer $u_1 u_2$ et $u_1 + u_2$ et montrer que ces solutions ne sont pas réelles.
8. En déduire qu'il existe un unique couple $(\rho_a,\theta_a) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[$ tel que $\rho_a e^{i\theta_a}$ soit solution de (E).
9. Montrer que $\rho_a \neq 1$.
10. Soit $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in]0,\pi[\text{ et } \operatorname{Im} z \neq 0\}$.
    Montrer qu'il existe un unique $z \in A_5$ tel que $\cos z = a$ et l'exprimer en fonction de ρ_a et θ_a.
    Cet élément de A_5 sera désormais noté $\zeta(a)$.
11. Calculer $\zeta(i)$.
12. Exprimer $\zeta(-a)$ en fonction de $\zeta(a)$.

D Il est temps de conclure

13. Représenter sur un même dessin les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_5 de points du plan dont les affixes sont dans A_1, A_2, A_3 et A_5 respectivement.
14. Déterminer $\Phi(A_5)$.
15. Soit $A_6 = A_4 \cup A_5$. Comme pour A_4, on admet que A_6 est une partie adaptée à Φ.
    Déterminer $\Phi(A_6)$.
16. On définit la fonction arccosinus complexe par

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{C} & \to & A_6 \\ a & \mapsto & \Phi_{A_6}^{-1}(a) \end{array}.$$

    Déterminer $\Gamma(a)$ en fonction de a (en discutant selon les valeurs de a).
17. Montrer que $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi$.