DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 **INFORMATIQUE : à rendre sur une feuille séparée après 30 minutes**

Toutes les questions sont indépendantes

1. Qu'obtient-on si on fait exécuter par Python les instructions `print("je mérite la note de 10+10")` puis `print("je mérite la note de", str(4*5))` ?
2. On donne la suite d'instructions suivante.

```
>>> u = 1
    for k in range(10):
        u = 2*u
    print(u)
```

   (a) Quelle est la réponse de Python lors de son exécution ?

   (b) Écrire une suite d'instructions donnant le même résultat en remplaçant la boucle `for` par une boucle `while`.

3. On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \leqslant 0, u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

   (a) Qu'est-ce qu'une fonction récursive ?

   (b) Écrire une fonction récursive et une fonction non récursive prenant chacune en entrée n et renvoyant le terme u_n de la suite.

   (c) Modifier ce qui précède pour écrire une fonction qui prend en entrée un entier p et qui renvoie le plus petit $k > 0$ tel que $u_k > p$.

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice A.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ (en discutant selon les valeurs de λ) le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 0 \\ 2x + y + \lambda z + 2t = 0 \\ x + \lambda y + 4z + t = 0 \end{cases} .$$

3. **(bonus)** Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère, on considère les plans d'équations

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{P}_1 & : & x + y + 2z - 1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 & : & 2x + y + \lambda z - 2 = 0 \\ \mathcal{P}_3 & : & x + \lambda y + 4z - 1 = 0. \end{array}$$

Déterminer les valeurs de λ telles que l'intersection de ces trois plans soit une droite et en exprimer une représentation, (par exemple sous forme paramétrique).

Exercice 3 *(Les intégrales de Wallis)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie l'intégrale définie par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0, W_1, W_2 et W_3.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que

$$W_{n-2} - W_n = \frac{1}{n-1} W_n.$$

indication : on pourra remarquer que $W_{n-2} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2} \sin^2 t \mathrm{d}t$ et effectuer une intégration par parties (...bien choisies...).

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \dfrac{2}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

4. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \leqslant W_n$.
6. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
7. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} W_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1$ et en déduire la limite de W_n quand n tend vers $+\infty$.

Problème 1

Une équation différentielle du second ordre

Le but de cette partie est de déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \tag{E}$$

On considère l'équation homogène associée :

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \tag{H}$$

1. Donner toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation homogène (**??**).
2. Déterminer une solution de l'équation (**??**) sous la forme $x \mapsto (ax+b)e^x$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$).
3. En déduire l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation (**??**).

De la superposition

4. Énoncer le principe de superposition des solutions pour une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
5. Déterminer toutes les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x + 4 \tag{E'}$$

Une équation non linéaire

Le but de cette partie est de résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y'' + 3xy' + 4y = x\ln(x) \tag{F}$$

Étant donnée une fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = h(\ln(x))$.

6. Montrer que f est solution de (**??**) si et seulement si h est solution d'une équation que l'on précisera.
7. En déduire les fonctions définies sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, solutions de (**??**)

Problème 2

Les trois parties centrales de ce problème présentent trois méthodes différentes pour effectuer le même calcul de la fonction g définie ci-dessous. Il est donc formellement interdit d'utiliser un résultat d'une de ces parties pour traite une des deux autres.

On définit la fonction h par

$$g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\mathrm{d}t.$$

Domaines de validité

On pose $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que g est bien définie pour $x > 0$.
3. Calculer $g(1)$.
4. Pour tout $x > 0$, comparer les valeurs de $g(x)$ et $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Première méthode : en dérivant

On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse pour la fonction f.
6. Montrer que $g(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $g'(x)$ à l'aide de f. En déduire une expression de $g(x)$.

Deuxième méthode : un astucieux changement de variable

8. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, déterminer une autre expression de $g(x)$.
9. En combinant astucieusement ces deux expressions de $g(x)$, retrouver le résultat de la partie précédente.

Troisième méthode : sans subtilité

10. Déterminer une expression de f sous la forme

$$f(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct+d}{t^2+1}$$

puis une primitive de f.

11. En déduire l'expression de $g(x)$.

Café et digestif

12. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin(2\theta)} \mathrm{d}\theta$$

(indication : oui, il y a un lien avec ce qui précède !)

Meilleurs vœux !