PCSI Jacam *01/02/2017*

Devoir surveillé n° 5 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. On note $f(x) = \sqrt{2+x}$ la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $[0{,}2[$ est un intervalle stable par f, c'est-à-dire que si $x \in [0{,}2[$ alors $f(x) \in [0{,}2[$.
2. Supposons $u_0 \in [0{,}2[$. Montrer que (u_n) est majorée et croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Faire une étude similaire pour conclure dans le cas où $u_0 \in]2,+\infty[$.

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$ et soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases} .$$

1. Montrer que x_n et y_n sont positifs pour tout $n \geqslant 0$.
2. Montrer que $\forall n > 0$, $x_n \leqslant y_n$.
3. Étudier la monotonie de (x_n) et (y_n).
4. En déduire que (x_n) et (y_n) convergent.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - y_n|$.
6. Montrer que (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite notée ℓ.
7. Montrer que la suite $(x_n y_n)$ est constante.
8. En déduire la valeur de ℓ.

Problème 1 (Séries chronologiques)

On définit les suites (a_n), (b_n) et (c_n) par $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2c_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + 4c_n \end{cases}$$

Dans toute la suite, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. Montrer que pour tout n, on peut écrire $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice 3×3 à déterminer. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = I_3 + 2J$.
4. Calculer J^2, J^3 puis déterminer une expression de J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = 2^n I_3 + (3^n - 2^n)J.$$
6. En déduire enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_n = 2^{n+2} - 3^{n+1} \\ b_n = 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ c_n = 3^{n+2} - 2^{n+1} \end{cases}.$$
7. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire
$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$$
8. Donner la définition d'une matrice inversible.
9. Déduire de la question 7 que A est inversible et déterminer A^{-1}.
10. On considère dans cette question que $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$.
    (a) Si $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, déterminer a_0, b_0, c_0.
    (b) Plus généralement, si pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = c_n = 1$, que valent a_0, b_0, c_0 ?

Problème 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x + x$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer α_1.
3. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{n}{2} \leqslant \alpha_n \leqslant n.$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. (a) Montrer que $\dfrac{\alpha_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n)}{n}$.
   (b) Montrer que $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\sim} n$.
   (c) Calculer, si elle existe la limite de $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.
5. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par
$$u_n = \frac{n - \alpha_n}{\ln n}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$1 - u_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln n}.$$

(b) Étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite éventuelle.

(c) Montrer que $\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln \alpha_n}{\alpha_n}$.

(d) En déduire que $1 - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 3

On donne $44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$. Calculer (ou du moins exprimer simplement)

$$\sum_{k=1}^{2017} \mathrm{E}(\sqrt{k}).$$