PCSI Jacam *15/03/2017*

DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle admet une limite en 0 et/ou si elle est continue en 0.

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{array}$,
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\sin(\frac{1}{x}) \end{array}$,
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

Problème 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I. On dit que $x \in I$ est un **point fixe** de f si $f(x) = x$.

Le but de ce problème est d'étudier divers résultats autour de la notion de point fixe. Les différentes questions 1, 2, *etc.* sont à peu près indépendantes. En tout cas les hypothèses annoncées sont propres à chaque question.

1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ continue. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f.
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
   (a) Montrer que f admet un point fixe.
   (b) Ce résultat reste-t-il vrai si l'on remplace $[0,1]$ par $]0,1]$?
   (c) Ce résultat reste-t-il vrai si l'on remplace $[0,1]$ par $[0, +\infty[$?
   (d) Application : peut-on trouver une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]) \subset \mathbb{Q}$.
3. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante.
   (a) On pose $A = \{x \in [0,1], x \leqslant f(x)\}$. Montrer que A possède une borne supérieure α.
   (b) Montrer que $f(\alpha)$ est un majorant de A.
   (c) En déduire que α est un point fixe de f.
   (d) f admet-elle encore un point fixe si on ne la suppose plus croissante mais décroissante ?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.
5. Soient f et g deux fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g ont un point fixe commun. On pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in [0,1], x \leqslant f(x) \text{ et } x \leqslant g(x)\}$ et s'inspirer de la question 3.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$A = X^7 - X^6 + X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$$

1. Trouver toutes les racines complexes de $X^4 - 1$.
2. Montrer que $X^4 - 1 = (X-1)(X^3 + X^2 + X + 1)$. En déduire toutes les racines de $X^3 + X^2 + X + 1$.
3. Trouver une racine évidente de A et déterminer le polynôme B tel que $A = (X-1)B$.
4. À l'aide de la question 2, trouver les six racines complexes du polynôme $X^6 + X^4 + X^2 + 1$.
5. En déduire la factorisation de A en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
6. Déterminer la factorisation de A en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Montrer que $X^8 - 1 = (X-1)(-A(-X))$. En déduire (d'une autre manière qu'à la question 5) la factorisation de A dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer le sous ensemble $E \subset \mathbb{C}[X]$ des polynômes qui sont divisibles par leur dérivée. Autrement dit, un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est un élément de E si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes constants appartenant à E se résume à $\{0\}$.
2. Soit $n \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que le polynôme $\lambda(X-\alpha)^n$ appartient à E.
3. Soit $P \in E$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$.
   (a) Déterminer le degré du polynôme Q tel que $P = Q \times P'$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ (que l'on n'essaiera pas de calculer) tel que $Q = \dfrac{1}{n}(X-\alpha)$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
   $$P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times P^{(k+1)}.$$
   (d) En déduire les valeurs de $P^{(k)}(\alpha)$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
   (e) Décrire l'ensemble des racines de P en précisant la multiplicité associée. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Conclure.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On note $S(n,p)$ le nombre de n-uplets d'entiers $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$$

Autrement dit, $S(n,p)$ représente le nombre de manières de décomposer p en n morceaux *(Attention : l'ordre de ces morceaux compte. Attention aussi : dans le cas où n vaut 1 ou 2, l'écriture ci-dessus est légèrement incorrecte).*

Par exemple $S(3,3) = 10$ car $3 = 0+0+3 = 0+3+0 = 3+0+0 = 0+1+2 = 0+2+1 = 1+0+2 = 1+2+0 = 2+0+1 = 2+1+0 = 1+1+1$.

1. Première méthode de calcul.
   (a) Déterminer les valeurs de $S(n,0)$, $S(n,1)$, $S(n,2)$, $S(1,p)$, $S(2,p)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,
   $$S(n+1,p) = \sum_{k=0}^{p} S(n,k).$$
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,
   $$S(n,p) = \binom{n+p-1}{p}.$$
2. Seconde méthode de calcul.
   (a) Si un mot est constitué de α fois la lettre A et β fois la lettre B, combien peut-on former d'anagrammes de ce mot ?
   (b) En l'exprimant en termes d'anagrammes faisant intervenir notamment le caractère « + », établir la valeur de $S(n,p)$.