

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Les résultats devront être encadrés.

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

Dans cet exercice, on pose $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Un théorème d'analyse

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On veut montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

On pose

$$h : t \mapsto (f(b) - f(a))(g(t) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(t) - f(b)).$$

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.
2. Conclure.

Règle de l'Hôpital

Pour cette partie, soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que g et g' ne s'annulent pas sur $]a, b[$ et que les limites en a^+ de f et g sont nulles.

Le but de cette partie est de montrer que si $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en a^+ , alors $\frac{f}{g}$ également et qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f}{g}$$

3. Montrer que f et g sont prolongeables par continuité en a en donnant les valeurs de $f(a)$ et $g(a)$.
4. D'après la première partie, montrer que pour tout $0 < h < b - a$, il existe $c_h \in]a, a + h[$ tel que

$$(f(a + h) - f(a))g'(c_h) = (g(a + h) - g(a))f'(c_h)$$

5. En déduire que pour tout $0 < h < b - a$, on a

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{g(a + h) - g(a)} = \frac{f'(c_h)}{g'(c_h)}.$$

6. Donner la limite de c_h quand h tend vers 0.
7. Conclure.
8. **Exemple.** À l'aide de ce résultat, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

et retrouver un équivalent bien connu.

Problème 1

Un exemple.

On travaille ici dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on pose

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

ainsi que

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y = 0\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + z = 0\}.$$

1. Montrer que D , H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base et la dimension de D .
3. Donner des bases et préciser les dimensions de H_1 et H_2 .
4. Exprimer D comme l'intersection de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Droites

On travaille toujours dans $\mathbb{R}^3$. Soient a et b deux nombres réels fixés. Dans cette partie, on appelle $D = \text{Vect}((a, b, 1))$.

5. Donner une base et la dimension de D .
6. Montrer que les familles $\{(a, b, 1), (1, 0, 0)\}$ et $\{(a, b, 1), (0, 1, 0)\}$ sont libres dans $\mathbb{R}^3$.
7. On pose $H_1 = \text{Vect}\{(a, b, 1), (1, 0, 0)\}$ et $H_2 = \text{Vect}\{(a, b, 1), (0, 1, 0)\}$. Montrer que H_1 et H_2 sont de dimension 2 et que $D = H_1 \cap H_2$.
8. On suppose dans cette question que $(a, b, 0) \neq (0, 0, 0)$. On appelle $G = \text{Vect}((a, b, 0))$ et on note $G_1 = \text{Vect}\{(a, b, 0), (0, 0, 1)\}$ et $G_2 = \text{Vect}\{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Montrer que G_1 et G_2 sont de dimension 2 et que $G = G_1 \cap G_2$.
9. Démontrer en toute généralité que toute droite de $\mathbb{R}^3$ (autrement dit tout sous-espace de dimension 1) est l'intersection de deux plans (c'est-à-dire deux sous-espaces de dimension 2) de $\mathbb{R}^3$.

Formule de Grassmann

Cette partie, indépendante des autres, a pour but de démontrer la formule de Grassmann, aussi appelée formule des quatre dimensions. On pourra l'utiliser dans la suite du problème, même si on n'a pas réussi à la démontrer intégralement. Divers résultats théoriques y sont également présentés, loin d'être tous difficiles.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et F un sous-espace vectoriel de E .

10. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie, inférieure ou égale à $\dim E$.
11. Montrer qu'il existe un sous-espace G de E tel que $E = F \oplus G$ et montrer que $\dim E = \dim F + \dim G$.
12. Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E
 - (a) Montrer que $A \cap B$ est un sous-espace vectoriel de B .
 - (b) Soit B' un supplémentaire de $A \cap B$ dans B . Montrer que A et B' sont en somme directe.
 - (c) En déduire la formule de Grassmann :

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

Deux hyperplans

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E de dimension $n > 0$. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E de dimension $n - 1$. On considère deux hyperplans de E , notés H_1 et H_2 .

13. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \leq n - 1$.
14. À l'aide de la formule de Grassmann, montrer que $\dim(H_1 + H_2) \geq n - 1$.
15. Si $\dim(H_1 + H_2) > n - 1$, à quoi l'espace $H_1 + H_2$ est-il égal ?
16. Montrer que si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$, alors $H_1 = H_2$. (on pourra utiliser à nouveau la formule de Grassmann)

Plusieurs hyperplans

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$. Soit F un sous-espace de E de dimension $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

17. Justifier que $F \neq \{0_E\}$ et que $F \neq E$.
18. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F .

Pour tout $i \in \llbracket p + 1, n \rrbracket$, on pose

$$H_i = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, e_n\}.$$

19. Montrer que pour tout $i \in \llbracket p + 1, n \rrbracket$, H_i est un hyperplan de E .
20. Montrer que $F = H_{p+1} \cap \dots \cap H_n$.
21. Montrer que dans un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, tout sous-espace de dimension $p < n$ est l'intersection de $n - p$ hyperplans.

Problème 2

Fonctions lipschitziennes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **k -lipschitzienne sur I** si

$$\forall x, x' \in I, |f(x') - f(x)| \leq k|x' - x|.$$

On dit que f est **lipschitzienne sur I** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ telle qu'elle soit k -lipschitzienne.

1. Déterminer les fonctions 0-lipschitziennes.
2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Si f est k -lipschitzienne, montrer qu'elle est k' -lipschitzienne pour tout nombre réel $k' \geq k$.
3. Quelques exemples.
 - (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $x \mapsto \lambda x$ est $|\lambda|$ -lipschitzienne.
 - (b) Montrer que la fonction $\cos$ est 1-lipschitzienne.
 - (c) Montrer (par exemple en raisonnant par l'absurde) que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.
4. Montrer que toute fonction lipschitzienne est continue.
5. Montrer que si f est de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$, alors elle est lipschitzienne.

Fonctions convexes

Petit rappel : étant donnés $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, le nombre $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ est le barycentre de x_1 et x_2 avec coefficients λ et $1 - \lambda$. Ainsi, on peut décrire le segment $[x_1, x_2]$ comme l'ensemble $\{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in [0, 1]\}$.

Par définition, on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** sur I si

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

l'inverse, on dit que f est **concave** si

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

6. Si l'on appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative, montrer que f est convexe si et seulement si l'arc de $\mathcal{C}$ compris entre M_1 d'abscisse x_1 et M_2 d'abscisse x_2 est situé en dessous du segment $[M_1 M_2]$.
7. Montrer que f est convexe et concave si et seulement si elle est affine.
8. Montrer que si f est concave, alors $-f$ est convexe.

9. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

10. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe.

(ii) Pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$.

(iii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\Phi_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

11. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I . Peut-on affirmer qu'une fonction f est convexe si et seulement si f'' est positive ?
12. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ une fonction convexe. Montrer que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
13. Montrer que $x \mapsto e^x$ est convexe. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ln t \leq t - 1.$$

14. Montrer que $t \mapsto -\ln t$ est convexe. En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$, on a

$$(x_1 + \dots + x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

15. (a) Soit $f : [A, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est décroissante sur $[A, +\infty[$.
- (b) Soit $f :]-\infty, B] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Que dire de f ?
- (c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Que dire de f ?
- (d) Application : soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que y s'annule sur $\mathbb{R}$.