

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Les résultats devront être encadrés.

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Problème 1

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

- $E_0 = \left\{ f \in E, \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \right\}$,
- C le sous-ensemble des fonctions constantes,
- P le sous-ensemble des fonctions continues 2π -périodiques,
- $P_0 = \left\{ f \in P, \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \right\}$.

1. (a) Montrer que E_0 et C sont des sous-espaces vectoriels de E .
 (b) Montrer que $E = E_0 \oplus P$.
 (c) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E puis démontrer *rapidement* que P_0 est aussi un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $f \in E$.

- (a) Montrer que f admet une unique primitive F continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{2\pi} F(t)dt = 0$. On notera $\varphi(f)$ cette primitive.
- (b) L'application $\varphi : E \rightarrow E$ est-elle linéaire ? injective ? surjective ? bijective ?

Soit $f \in P$.

- (a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$.
 - (b) Montrer que f admet une primitive dans P si et seulement si $f \in P_0$.
 - (c) Dans ce cas, montrer que $\varphi(f) \in P_0$.
3. On note désormais $\Phi : P_0 \rightarrow P_0$ la restriction de φ à P_0 . On définit par récurrence des fonction polynomiales $B_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par :
 - B_0 est la fonction constante égale à 1,
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \varphi(B_n)$.
 - (a) Calculer $B_n(t)$ pour $n = 1$ et $n = 2$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(2\pi)$.
 4. Pour tout $f \in P_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $H_n(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$H_n(f) : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_n(t)f(x+t)dt.$$

- (a) Montrer que $H_n(f)$ est une fonction 2π -périodique.
- (b) Montrer que $H_1(f) = \Phi(f)$.
- (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $H_{n+1}(f) = H_n(\Phi(f))$.
- (d) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $H_n(f) = \Phi^n(f)$ (où Φ^n désigne $\underbrace{\Phi \circ \dots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$)

Exercice 1

Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x - 2y + 4z, -4x + 8y + 2z, 9z)$ une application définie sur $\mathbb{R}^3$. On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note A cette matrice.
2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.
3. Soit E_λ l'équation $f(u) = \lambda u$ où $u = (x, y, z)$. Montrer que E_λ équivaut au système :

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x - 2y + 4z &= 0 \\ -4x + (8 - \lambda)y + 2z &= 0 \\ (9 - \lambda)z &= 0 \end{cases}.$$

4. En déduire que $f(u) = \lambda u$ possède $u = (0, 0, 0)$ comme unique solution si et seulement si $\lambda \notin \{0, 9\}$.
5. Montrer que l'ensemble des solutions de E_9 est un espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base (u_1, u_2) .
6. Montrer que l'ensemble des solutions de E_0 est un espace vectoriel de dimension 1 dont on donnera une base u_3 .
7. Écrire la matrice de f dans la base u_1, u_2, u_3 . On note D cette matrice. La matrice obtenue est-elle inversible ? Quel est son rang ?
8. Montrer que D et D^2 sont liées, en déduire que A et A^2 sont liées. Montrer que $\frac{1}{9}A$ est la matrice d'un projecteur.
9. Exprimer A^n en fonction de A (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Problème 2

Dans ce problème on va s'intéresser aux compositions successives d'une fonction avec elle-même : on note pour cela $f^{[1]} = f$ et, pour $n \geq 2$, $f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}$. Ainsi, $f^{[2]} = f \circ f$, $f^{[3]} = f \circ f \circ f$, etc. On rappelle que la fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, donc sur un voisinage de 0.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{[n]}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
2. Quelle hypothèse minimale permet d'affirmer que $\tan^{[n]}$ admet un développement limité (DL) à l'ordre 5 en 0 ? Justifier que ce DL sera de la forme

$$\tan^{[n]}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o(x^5)$$

avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$.

3. En utilisant $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, déterminer un DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$. En déduire les valeurs de a_1, b_1, c_1 .
4. Calculer les valeurs de a_2, b_2, c_2 .
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir les expressions de $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n uniquement.
6. Expressions des trois suites :
 - (a) En déterminant la nature de (a_n) , donner une expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (b) En déterminant la nature de (b_n) , donner une expression de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (c) Pour $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)$ puis en déduire l'expression de c_n en fonction de n .
7. Conclusion : donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan^{[n]}(x)$.
8. Déterminer la plus petite valeur de $n \geq 1$ pour laquelle la partie principale du DL de $\tan^{[n]}(x)$ en 0 a tous ses coefficients entiers.