

TD 10. Algèbre linéaire

10.1 Espaces vectoriels

Exercice 10.1

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \{(s - t, s + t, t), s, t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 10.2

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la loi de composition interne $\otimes$ suivante :

$$\begin{aligned}\otimes : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (a, b) &\mapsto a \otimes b = ab\end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \otimes, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 10.3

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en les décrivant comme $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$,
2. $F_2 = \{(t, -2t) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$,
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$,
4. $F_4 = \{(2s + t, s - t, s + t) \in \mathbb{R}^3, s, t \in \mathbb{R}\}$,
5. $F_5 = \mathbb{R}_2[X]$ (l'ensemble des polynômes de degré au plus 2),
6. $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$,
7. l'ensemble F_7 des suites géométriques de raison 2,
8. l'ensemble F_8 des suites arithmétiques.

Exercice 10.4

Soit E l'ensemble des fonctions réelles. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sev. de E .

1. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$,
2. l'ensemble des fonctions monotones,
3. l'ensemble des fonctions telles que $f(28) = 0$,
4. l'ensemble des fonctions telles que $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$,
5. l'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle
6. l'ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$,
7. l'ensemble des fonctions admettant une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

Exercice 10.5

On appelle E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites de limite nulle et G l'ensemble des suites constantes.

1. Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 10.6

On appelle E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F l'ensemble des fonctions affines et G l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 10.7

On appelle E l'ensemble des polynômes de degré au plus 2, F l'ensemble des polynômes P de E tels que $P' = 0$ et $G = \text{Vect}\{X, X^2\}$.

1. Justifier que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 10.8

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et F et G deux sev de E . Montrer que

$$F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G.$$

10.2 Applications linéaires

Exercice 10.9

Les applications suivantes sont-elles des morphismes d'espaces vectoriels? Le cas échéant, déterminer leur noyau et leur image.

- | | |
|---|---|
| 1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x$ | 6. $f_6 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
$P \mapsto (X^2 + 1)P$ |
| 2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \mapsto (x - y, x + z)$ | 7. $f_7 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$
$P \mapsto P(1)$ |
| 3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \mapsto xyz$ | 8. $f_8 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
$P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$ |
| 4. $f_4 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
$f \mapsto 2f + f'$ | 9. $f_9 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
$P \mapsto P(X + 1) - P(X)$ |
| 5. $f_5 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(u_n) \mapsto (u_0, u_1)$ | |

Exercice 10.10

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$

1. Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$.
2. Montrer que $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$.
3. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \Leftrightarrow \text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$.
4. Montrer que $\text{Im } u = \text{Im } u^2 \Leftrightarrow \text{Ker } u + \text{Im } u = E$.

Exercice 10.11

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E, F et G des ev.

1. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
3. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_F\}$.
4. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g \Leftrightarrow \text{Ker } g + \text{Im } f = F$.

Exercice 10.12

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $\text{Im } g \subset \text{Ker } f \Leftrightarrow g \circ f = 0$.
2. Montrer que si $g \circ f = f \circ g$, alors $\text{Ker } g$ est stable par f (emphie.e. si $x \in \text{Ker } g$, alors $f(x) \in \text{Ker } g$).
3. Montrer que si $g \circ f = \text{Id}$, alors f est injective.

10.3 Projecteurs, symétries**Exercice 10.13**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\text{Id} - p$ en est un aussi.
2. Montrer que $\text{Ker}(\text{Id} - p) = \text{Im } p$ et $\text{Ker } p = \text{Im}(\text{Id} - p)$.

Exercice 10.14

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre

- (i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$,
- (ii) p et q sont des projecteurs et $\text{Ker } p = \text{Ker } q$.

10.4 Bases et dimension**Exercice 10.15**

Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ou liées dans les espaces indiqués ? Dans le cas où une famille est liée, donner la dimension et une base de l'espace qu'elle engendre.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v, w) , avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v, w) , avec $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Dans $\mathbb{R}^4$, la famille (u, v) , avec $u = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
4. Dans $\mathbb{R}^4$, la famille (u, v, s, t) , avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Dans $\mathbb{R}^4$, la famille (u, v, s, t) , avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $(\sin, \cos)$.
7. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille (f, g, h) avec $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos(2x)$ et $h : x \mapsto \cos^2 x$.
8. Dans $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) avec $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto x \cos x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$ et $f_4 : x \mapsto x \sin x$.

Exercice 10.16

À quelle condition sur a, b, c les vecteurs $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$ forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10.17

Soit $f_k(t) = e^{kt}$. Montrer que $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 10.18

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E , un ev de dimension 3.

- Soient $f_1 = e_2 + 2e_3$, $f_2 = e_3 - e_1$, $f_3 = e_1 + 2e_2$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) forme une base de E .
- Soient $g_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $g_2 = e_2 + e_3$. Montrer que (g_1, g_2) est une famille libre et la compléter en une base de E .

Exercice 10.19

Montrer que les ensembles suivants sont des sev et en déterminer la dimension et une base.

- Dans $\mathbb{R}^3$, $F_1 = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0 \text{ et } -x - y + z = 0\}$.
- Dans $\mathbb{R}^4$, $F_2 = \{(x, y, z, t) \mid 2x - y + z - t = 0\}$.
- Dans $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $F_3 = \{f \in E \mid f'' - 2f' + 2f = 0\}$.
- Dans $\mathbb{R}_4[X]$, $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$.

Exercice 10.20

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto XP' - 2P \end{aligned}$$

Montrer que φ est un endomorphisme, déterminer son image, son rang puis déterminer la dimension et une base de son noyau.

Exercice 10.21

Déterminer la base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (y - z, z - x, x - y)$
- $f_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z, t) \mapsto (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$

Exercice 10.22

Soient E de dimension n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g$ est un isomorphisme. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

10.5 Matrices et applications linéaires

Exercice 10.23

Pour chacune des applications suivantes, vérifier que u est linéaire, calculer sa matrice dans les bases canoniques des espaces considérés, calculer son rang et u^{-1} le cas échéant puis à l'aide de la matrice, calculer l'image du vecteur V donné.

1. $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $V = (0, 1, -1)$,
 $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y - 3z)$
2. $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\vec{w} = (1, 1, 1)$ et $V = (-1, 0, 2)$,
 $\vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{w}$
3. $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ et $V = X^3 - 3X^2 + X - 1$,
 $P \mapsto XP'(X) - P(X)$
4. $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $V = X^2 - X + 1$,
 $P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$
5. $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 $M \mapsto EM$

Exercice 10.24

Soient E un ev de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.25

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2)$. On définit l'endomorphisme f par $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $f(e_2) = -e_1 + 2e_2$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base e .
2. Soit $v = xe_1 + ye_2$. Calculer dans la base e les composantes x' et y' de $f(v)$.
3. On pose $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$. Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E .
4. Déterminer $P_{e,\varepsilon}$ et $P_{\varepsilon,e}$.
5. En déduire la matrice B de f dans la base ε .

Exercice 10.26

Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + 2e_3$.

1. Montrer que $f = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage de e à f .
3. Soit u le vecteur de coordonnées $(-1, 0, 2)$ dans la base canonique. Quelles sont ses coordonnées dans la base f ?
4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Déterminer $\text{Mat}_f(\varphi)$.
 $(x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, -x - z, -x + 2y)$

Exercice 10.27

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = 2X^2 - X$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire les matrices de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. Soit $P(X) = X^2 - X + 2$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$?
4. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.
$$\begin{array}{ccc} P & \mapsto & XP' \end{array}$$