



# TD 8. Arithmétique et polynômes

## 8.1 Nombres entiers

### Exercice 8.1

Montrer que  $5^{45} + 4^{30}$  est un nombre composé.

### Exercice 8.2

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2$  divise  $(n+1)^n - 1$ .

### Exercice 8.3

Trouver tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $xy = 2x + 3y$ .

### Exercice 8.4 (*Nombres de Mersenne, nombres parfaits*)

Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $M_n = 2^n - 1$ .

1. Montrer que si  $M_n$  est premier, alors  $n$  est premier.
2. On appelle **nombre premier** un nombre  $k$  dont la somme des diviseurs vaut exactement  $2k$ . Montrer que si  $M_n$  est un nombre premier, alors  $2^{n-1}M_n$  est un nombre parfait.

## 8.2 Dénombrement

### Exercice 8.5

Une urne contient 15 boules numérotées. Celles numérotées de 1 à 5 sont blanches, celles numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément 5 boules.
  - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
  - (b) Combien y a-t-il de tirages unicolores possibles ?
  - (c) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules sans remise.
  - (a) Combien y a-t-il de tirages (ordonnés) possibles ?
  - (b) Combien y a-t-il de tirages donnant 2 boules noires et 3 boules blanches ?

### Exercice 8.6 (*Des chiffres et des lettres*)

En utilisant l'alphabet français, ses 20 consonnes et 6 voyelles, combien existe-t-il de mots (ayant un sens ou non) formés de trois lettres

1. quelconques ?
2. distinctes ?
3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ?
4. dont au moins une consonne ?
5. dont au moins deux voyelles identiques ?
6. alternant consonne(s) et voyelle(s) ?

**Exercice 8.7**

Combien y a-t-il de mots de cinq lettres avec au moins un Z ?

**Exercice 8.8** (*Anagrammes*)

Combien existe-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot OISEAU ? de mot ANAGRAMME ?

**Exercice 8.9**

Les immatriculations automobiles sont désormais composées de deux lettres, suivies de trois chiffres et à nouveau deux lettres. En outre, les deux premières lettres ne sont jamais WW ni SS, les trois chiffres ne sont pas 000 et les dernières lettres ne peuvent pas être SS. Combien y a-t-il d'immatriculations possibles ?

### 8.3 Opérations

**Exercice 8.10**

Calculer  $P = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n})$  (*indication : on pourra calculer  $(1 - X)P$* ).

**Exercice 8.11**

- Déterminer les coefficients du polynôme  $(1 + X + X^2 + \dots + X^n)^2$ .
- En déduire les coefficients du polynôme  $(1 - X + X^2 + \dots + (-1)^n X^n)^2$ .

**Exercice 8.12**

Trouver tous les polynômes  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant

- $Q^2(X) = XP^2(X)$ ,
- $P \circ P = P$ ,
- $P(X^2) = P(X)$ ,
- $P(X + 1) = XP(X)$ ,
- $P'^2 = 9P$ ,
- $P - XP' = X$ .

**Exercice 8.13**

Effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- $A = X^5 + X^2 + 1$  et  $B = X^3 - 3X^2 + 8X - 21$ ,
- $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$  et  $B = X^2 - 5X + 3$ ,
- $A = X^3 + iX^2 + X$  et  $B = X - i + 1$ ,
- $A = X^n + 2X - 2$  et  $B = (X - 1)^2$ .

**Exercice 8.14**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a, b \in \mathbb{K}^2$ .

- Calculer en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$  le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ .
- Calculer en fonction de  $P(a)$  et  $P'(a)$  le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)^2$ .

**Exercice 8.15** *Polynômes de Lagrange*

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts. Pour tout  $0 \leq i \leq n$ , on définit le polynôme

$$L_i = \frac{\prod_{j:j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j:j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

1. Montrer que pour tous  $0 \leq i, j \leq n$ , on a  $L_i(a_j) = 0$  ou  $1$  (préciser les cas).
2. Soit  $P$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ . Montrer que

$$P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i(X).$$

## 8.4 Racines et factorisation

### Exercice 8.16

1. Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $Q = X^2 + X + 1$ .
2. Soient  $m, n, p \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $Q$  divise  $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ .
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  le polynôme  $(X + 1)^n + X^n + 1$  est-il divisible par  $Q$  ?

### Exercice 8.17

Soit  $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$ .

1. Montrer que 3 est racine double de  $P$ .
2. En déduire une factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

### Exercice 8.18

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que  $(X - 1) | P(X^k) \Rightarrow (X - 1) | P$ .
2. Montrer que  $(X^2 + X + 1) | (P(X^3) + XQ(X^3)) \Rightarrow (X - 1) | P$  et  $(X - 1) | Q$ .

### Exercice 8.19

Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$  et  $P'(0) = 2$ .

### Exercice 8.20

Quel est l'ordre de la racine 1 dans le polynôme  $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$  ?

### Exercice 8.21

Montrer que le polynôme  $P = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$  n'a pas de racine multiple.

### Exercice 8.22

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

1.  $X^4 + X^2 + 1$ ,
2.  $X^6 + 1$ ,
3.  $X^2 - X + 1)^2 + 1$ ,
4.  $X^8 + X^4 + 1$ ,
5.  $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ .