

TD 2. Calculs algébriques

Exercice 2.1

Montrer que pour tout $n > 1$ entier, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$.

Exercice 2.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right),$
2. $\sum_{k=1}^n (3^k - 2k + n - 1),$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!},$
4. $\sum_{k=1}^n (2k+1)^2$ (de deux manières différentes),
5. $\sum_{k=1}^n k2^k$ (poser $j = k - 1$),
6. $\sum_{k=1}^n \cos(k\pi),$
7. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right),$
8. (*) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}.$

Exercice 2.3

Soit $n \geq 2$. Calculer

1. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right),$
2. $\prod_{k=1}^n k(n+1-k).$

Exercice 2.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 - 2 \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1).$

Exercice 2.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i,$
2. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i,$
3. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j),$
4. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (ij),$
5. $\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \frac{1}{i},$

Exercice 2.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n),$
2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j),$