TD 5. Equations différentielles

Exercice 5.1

Trouver une primitive (et indiquer son ensemble de validité) de la fonction

(a) $x \mapsto x(x^2-1)^7$,
(b) $x \mapsto \frac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$,
(c) $x \mapsto (-x^2+x^2-2x+3)e^{-x}$,
(d) $x \mapsto x \sin x$,
(e) $x \mapsto x^2\sqrt{x^3+1}$,
(f) $x \mapsto \sqrt{5x+4}$,
(g) $x \mapsto (2x) \operatorname{Arctan} x$,
(h) $x \mapsto x^2 \ln x$,
(i) $x \mapsto \cos^4 x$,
(j) $x \mapsto \frac{sin^3x}{\cos^8 x}$,
(k) $x \mapsto \frac{\cos^3 x}{(2+\sin x)^2}$,
(l) $x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}$,
(m) $x \mapsto \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$,
(n) $x \mapsto \frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}$,
(o) $x \mapsto \tan(3x)$,
(p) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$,
(q) $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$,
(r) $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

Exercice 5.2

Résoudre les équations différentielles suivantes

(a) $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
(b) $\cos(x)y' - \sin(x)y = \tan x$;
(c) $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]0,1[$,
(d) $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$.

Exercice 5.3 Résoudre et raccorder le cas échéant.

(a) $x(x-4)y' + (x-2)y = 0$;
(b) $xy' - 2y = x^4$;
(c) $(e^x-1)y' - (e^x-1)y = 3+2e^x$;
(d) $(x-1)y' - 2y = (x-1)^3$.

Exercice 5.4

Résoudre sur $\mathbb{R}$

(a) $y'' + 2y' + 5y = 5x$;
(b) $y'' - 2y' - y = e^x \sin x$;
(c) $-2y'' + y' + y = -e^x$;
(d) $y'' + 9y = x + 1$.

Exercice 5.5

Résoudre

$$xy'' - 2y' - x^4 = 0.$$

Exercice 5.6

Intégrer les systèmes différentiels (où les fonctions inconnues sont $t \mapsto x(t)$ et $t \to y(t)$.

$$(a) \begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases} \quad ; \quad (b) \begin{cases} x' = 7x - 5y \\ y' = 10x - 8y \end{cases} .$$

Exercice 5.7

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi - x)$.

Exercice 5.8

Montrer que toute solution de

$$y' + e^{x^2} y = 0$$

admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 5.9 Soit l'équation différentielle

$$(x-1)y' + (x-2)y = x(x-1)^2.$$

1. Montrer (sans résoudre l'équation différentielle) que toutes les courbes intégrales passent par un même point. Trouver le lieu des points de ces courbes où la tangente est horizontale.
2. Résoudre l'équation différentielle.

Exercice 5.10

Résoudre sur $\mathbb{R}^*$

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln x.$$

Indication : on pourra vérifier que $x \mapsto 1/x$ est solution

Pour compléter

Exercice 5.11

Résoudre

(a) $y'' - y = (3x^2 - 11x + 6)e^{-2x}$;
(b) $y'' - 2(1+i)y' + 2iy = x + i$;
(c) $y'' - 4y' + 3y = \sin x + \cos x$;
(d) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x$;
(e) $y'' - y = x^2 \operatorname{sh} x$.

Exercice 5.12 *Équations de Bernoulli et Riccati*

Résoudre

(a) $y'(x) = y(x) - y^2(x)$ et $y(0) = 2$ (on précisera l'intervalle contenant 0 sur lequel on obtient une solution) ;
(b) $x^3 y' + y^2 + x^2 y + 2x^4 = 0$ (on pourra vérifier que $x \mapsto -x^2$ en est une solution) ;
(c) $(y' - y^2)\cos x + y(2\cos^2 x + \sin x) = \cos^3 x$ (on pourra vérifier que $x \mapsto \cos^3 x$ en est une solution) ;
(d) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy - 1$ (à vous de trouver une solution particulière).

Exercice 5.13 *Équations d'Euler*

Résoudre

(a) $x^2y'' - 2y = x$;

(b) $x^2y'' + xy' - y = x \ln |x|$.

Exercice 5.14

Soit l'équation (E) : $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3e^x$.

1. Vérifier que $x \mapsto e^x$ est solution de (E_0).
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z : x \mapsto y(x)e^{-x}$ est solution d'une équation (E_1) que l'on déterminera.
3. Résoudre (E_1) et en déduire les solutions de (E).