TD 4. Applications

4.1 Ensembles et applications

Exercice 4.1

Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$ (rappel : $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E).

Exercice 4.2

Étant données trois parties A, B, C de E, montrer que

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C.$$

Exercice 4.3

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 4.4

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que si $A \subset E$, alors $A \subset f^{-1}(f(A))$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
2. Montrer que si $B \subset F$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
3. Soient A_1, A_2 deux parties de E.
   (a) Montrer que
   $$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$
   Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
   (b) Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que
   $$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$
4. Soient B_1, B_2 deux parties de F.
   (a) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$
   (b) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Exercice 4.5

1. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

(a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

(a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$.

3. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si c'est possible, donner une expression de leur bijection réciproque.

(a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-3y, x+2y) \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,z,x) \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \end{array}$.

Exercice 4.6

Étant donnée $f : E \to F$, on note

$$f_d : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad f_r : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}.$$

1. Montrer que f est injective si en seulement si f_d est injective.
2. Montrer que f est surjective si en seulement si f_r est injective.

Exercice 4.7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3 \quad \text{et} \quad f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

Exercice 4.8

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.
2. Si f est paire et n fois dérivable, discuter de la parité de sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ en fonction de n.
3. Qu'en est-il pour une primitive de fonction paire ? impaire ?
4. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction T-périodique (dérivable) ? Et d'une primitive ?

4.2 Fonctions usuelles

Exercice 4.9

On définit f par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Déterminer les points où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 4.10

Déterminer les limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\ln(x^3)}{x^4}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 e^x (\ln(-x))^2$.

Exercice 4.11

Étudier les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \ln(\ln x)$,
2. $f_2(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$,
3. $f_3(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$,
4. $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$,
5. $f_5(x) = \tan x + \frac{1}{\tan x}$,
6. $f_6(x) = \mathrm{Arcsin}(\sin(x))$,
7. $f_7(x) = \ln(\mathrm{ch}\, x)$.

Exercice 4.12

Combien la fonction $x \mapsto (x-1)e^x - ex + 1$ a-t-elle de zéros ?

Exercice 4.13

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1.$$

Exercice 4.14

Pour $x > 0$, on définit $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. Montrer que f réalise une bijection sur $]0, +\infty[$ dont on précisera l'image puis exprimer la bijection réciproque de f et sa dérivée.

Exercice 4.15 *(Caractérisations du logarithme, tome 1)*

Étant donné un intervalle I, on cherche les fonctions f non nulles et dérivables sur I telles que

$$\forall (x,y) \in I,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que si f est définie en 0, alors f est la fonction nulle.
2. On considère à partir de maintenant que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(y) = f(xy)$. Calculer $g'(y)$ et en déduire $f'(x)$.
4. Donner les fonctions solutions du problème.

Exercice 4.16 *(Caractérisations du logarithme, tome 2)*

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On note f la primitive de $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ s'annulant en $x = 1$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(xy)$. Calculer $g'(x)$ puis $f'(x)$.
2. En déduire que $g - f$ est constante puis que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 4.17

Calculer le maximum pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $\sqrt[n]{n}$.

Exercice 4.18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui convient) les équations, inéquations ou systèmes suivants.

1. $\sqrt{19-x}+\sqrt{97+x}=14$,
2. $|2x-4| \leqslant |x-1|$
3. $e^{2x}-2e^x-3=0$,
4. $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$,
5. $5^x-5^{x-1}-2^{3x-1}=0$,
6. $2^{2x}-3^{x-1/2}=3^{x+1/2}-2^{2x-1}$,
7. $\ln|x+1|-\ln|2x+1| \leqslant \ln 2$,
8. $\begin{cases} x+y=52 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$,
9. $\log_2 x+\log_x 2=\frac{5}{2}$,
10. $\tan(3\operatorname{Arcsin} x)=1$,
11. $\operatorname{ch} x=a$,
12. $5\operatorname{ch} x-3\operatorname{sh} x=4$.

Exercice 4.19

Calculer

1. pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\operatorname{Arctan} x)$ et $\cos(\operatorname{Arctan} x)$,
2. pour $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arccos} x$,
3. pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan} x+\operatorname{Arctan}(1/x)$.

Exercice 4.20 *(Formule de Machin)*

1. Montrer que $\operatorname{Arctan}(1/2)+\operatorname{Arctan}(1/3)=\pi/4$.
2. Lorsqu'il est défini, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.
3. En déduire que $\pi/4=4\operatorname{Arctan}(1/5)-\operatorname{Arctan}(1/239)$.

Exercice 4.21

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(2x)=1+2\operatorname{sh}^2(x)$.

Exercice 4.22

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$.

1. Montrer que $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{sh}(2x)}=\dfrac{4\operatorname{ch}^2(x)-3}{2\operatorname{sh}(x)}$.
2. Étudier f.

Exercice 4.23 $*$

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{(1-x)} \geqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)=\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$.