TD 9. Étude des fonctions réelles

9.1 Limites, continuité

Exercice 9.1

Montrer à l'aide de la définition seulement que $x \mapsto x^2 + 2x$ a pour limite 3 quand x tend vers 1.

Exercice 9.2

1. Trouver un exemple de fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ ne prenant que deux valeurs et n'admettant pas de limite en 0.
2. Trouver un exemple de fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ n'admettant pas de limite en 0 et telle que $f(]0,1])$ soit un intervalle borné.
3. Trouver un exemple de fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ n'admettant pas de limite en 0 et telle que $f(]0,1]) = \mathbb{R}$.

Exercice 9.3 *(TVI en l'infini)*

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ admettant pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toutes les valeurs entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclue).

Exercice 9.4

Montrer que $\dfrac{x^x}{\mathrm{E}(x)^{\mathrm{E}(x)}}$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$.

Exercice 9.5

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est croissante, alors f admet une limite à droite (resp. à gauche) en tout $x \in [a,b[$ (resp. $]a,b]$).
2. Soit $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto f(x)$ soit croissante et $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 9.6

1. Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2) = f(x)$.
2. Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(3x) = f(x)$.

Exercice 9.7 *(Un théorème de point fixe)*

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

9.2 Calculs de limites, comparaisons

Exercice 9.8

Calculer

$$\lim_{x \to 0,16} \left(\mathrm{E}(x+1) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}\right)^2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{th} x + 3\operatorname{Arctan}(x + e^x)}{(2 + e^{-x})^2}$$

Exercice 9.9

Trouver un équivalent simple de

(i) $a^x - 1$ en 0 (avec $a > 0$ fixé) ;

(ii) $1 - \cos x$ en 0 ;

(iii) $\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x}$ en 0 ;

(iv) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ en 0 ;

(v) $x\ln(1+x) - (x+1)\ln x$ en $+\infty$;

Exercice 9.10

Calculer les limites suivantes.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$;

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$;

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \pi/3}$.

9.3 Dérivabilité

Exercice 9.11

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{\sin x} & \text{si } x \in]0, \pi/2] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0.

Exercice 9.12

Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

(i) $f : x \mapsto \sqrt[5]{x^3}$;

(ii) $g : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2+1}$;

(iii) $h : x \mapsto \ln(\ln x)$;

(iv) $p : x \mapsto \ln(|x|)$;

(v) $q : x \mapsto x \operatorname{argth}(\sin x)$.

Exercice 9.13

Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f, montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement avec

(i) $f(x) = x\sin(1/x)$;

(ii) $f(x) = \frac{x^4}{e^x - 1}$.

Exercice 9.14

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = e^{-1/x}$ et $g(x) = f(x)/x$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $xf'(x) = g(x)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que son prologement est dérivable en 0.
3. Faire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9.15

Calculer $f^{(n)}(x)$ pour

(i) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; (ii) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; (iii) $f(x) = x^2 e^{3x}$.

Exercice 9.16

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Montrer que f est dérivable, calculer sa dérivée et en déduire une autre expression de $f(x)$.

Exercice 9.17

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} (x^x)^x \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$? deux fois dérivable ?

Exercice 9.18

Étant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(x)^2 \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^k$. g est-il nécessairement $\mathcal{C}^k$?

Exercice 9.19

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(b) < 0 < f'(a)$. Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

Exercice 9.20 (Rolle généralisé)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9.21

Montrer qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f' ne s'annule pas ne peut être périodique.