TD 11. Riemann et Taylor

11.1 Intégration

Exercice 11.1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$,

(ii) $f \geqslant 0$ ou $f \leqslant 0$.

Exercice 11.2 *(Un théorème de point fixe)*

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f = 1/2$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 11.3

Montrer que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\, x}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Exercice 11.4

Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\, t = 0$$

Même question avec f en escalier puis avec f continue sur $[a, b]$.

Exercice 11.5

Calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

Exercice 11.6

Étudier les variations de la fonction

$$\begin{array}{rcl} g :]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}\, t}{t^2-1}. \end{array}$$

11.2 Formules de Taylor

Exercice 11.7

Montrer que le reste dans la formule de Taylor avec reste intégral peut s'écrire

$$R_n(x) = (x-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + (x-a)u)\,\mathrm{d}\, u.$$

Exercice 11.8

Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sin x \cos x$ à l'ordre 5,
2. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3,
3. $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4,
4. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ à l'ordre 3,
5. $x \mapsto (1+2x)^x$ à l'ordre 5,
6. $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ à l'ordre 3,
7. $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3,
8. $x \mapsto \sqrt{3+\cos x}$ à l'ordre 3.

Exercice 11.9 Déterminer les développements limités en x_0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sin x$ en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3,
2. $x \mapsto e^x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4.
4. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 3.

Exercice 11.10

1. Calculer $\displaystyle\int_0^x (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}\,t$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 8 de tan en 0.

Exercice 11.11

En utilisant des développements limités, calculer

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$.

Exercice 11.12

En utilisant des développements limités, donner un équivalent simple de

1. $\displaystyle\frac{e^x-\sqrt{1+x}}{(x^2+1)(x+3)}$ en 0,
2. $\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}$ en 0^+,
3. $e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$ en $+\infty$.