TD 1. Logique

Exercice 1.1

Écrire la négation de chacune des assertions suivantes.

1. Dans toutes les prépas, tous les élèves détestent tous leurs professeurs.
2. Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir.

Exercice 1.2

En appelant C l'assertion « Le chat dort » et D l'assertion « Les souris dansent », traduire en langage logique les propositions suivantes et examiner les liens logiques entre elles.

1. Si les souris ne dansent pas, alors le chat ne dort pas.
2. Les souris ne dansent pas ou le chat dort.
3. Si le chat dort alors les souris dansent.
4. Si les souris dansent alors le chat dort.
5. Le chat ne dort pas ou les souris dansent.
6. Les souris dansent et le chat ne dort pas.

Exercice 1.3

Vrai ou faux ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = x^2$

Exercice 1.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Que signifie l'assertion suivante ?

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y > x \Rightarrow f(y) < f(x)).$$

Écrire sa négation.

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de chacune des assertions suivantes.

1. f est croissante.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \geqslant 0, (|x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$.

Exercice 1.6

Écrire la contraposée de chacune des affirmations suivantes.

1. $x \neq 1 \Rightarrow f(x) \neq 0$,
2. $x \geqslant 1 \Rightarrow f(x) > 0$.

Exercice 1.7

Pour chacune des assertions suivantes, dire ce qu'elle signifie et si l'on peut trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui la vérifie et une qui ne la vérifie pas.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.

2. $\forall T \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

Exercice 1.8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Traduire au moyen des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ les assertions suivantes. On pourra utiliser les connecteurs « et » et « ou », mais on évitera les $\neg$ et $\exists!$.

1. f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$,
2. f s'annule sur $\mathbb{R}$,
3. f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$,
4. f est constante,
5. f n'est pas constante,
6. f est monotone,
7. f n'est pas monotone,
8. f admet un maximum et ce maximum est atteint en un unique point.

Exercice 1.9

Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde les propositions suivantes.

1. Le produit d'un nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
2. La racine carrée d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
3. Si un rectangle a une aire de $145m^2$, alors sa longueur est supérieure à $12m$.
4. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1.10

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer les assertions suivantes.
   (i) $x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y|$.
   (ii) $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
2. Soient $n_1, \ldots, n_9 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + \ldots + n_9 = 90$. Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure ou égale à 30.
3. $(**)$ Soient $n_1, \ldots, n_9 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + \ldots + n_9 = 93$. Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est strictement supérieure à 31 (et même 32).

Exercice 1.11

Montrer à l'aide d'une récurrence les propriétés suivantes (pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque ce n'est pas précisé).

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.
4. Pour tout entier $n \geqslant 3$, la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est égale à $(n-2)\pi$.

Exercice 1.12

Résoudre à l'aide d'une récurrence forte (double si c'est suffisant).

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

   On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 1.13

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(m) + f(n).$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y) + x + y.$$