TD 13. Probabilites

13.1 Espaces probabilisés

Exercice 13.1

On lance trois fois de suite un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir des résultats classés

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant (au sens large) ?

Exercice 13.2 *(plus d'information = moins de certitudes)*

1. Une dame vous raconte sa vie : « Vous savez, j'ai deux enfants, dont une fille... ». Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. et elle poursuit : « ...une fille qui est mon aînée et... ». Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice 13.3

On a 3 boîtes B_1, B_2 et B_3 Dans la boîte B_i, on a i boules noires et $(4-i)$ boules blanches. On choisit aléatoirement une boîte, la boîte B_i ayant pour probabilité d'être choisie $\dfrac{i}{10}$ puis on tire une boule de cette boîte.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
2. Si la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la boîte n° 3 ?

Exercice 13.4

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant. On lance un dé. Si le résultat est pair, un lancer de pièce (PILE ou FACE) détermine le vainqueur. Si le résultat est impair, on lance un deuxième dé et on ajoute son résultat au premier. Un total inférieur ou égal à 7 fait gagner A ; sinon, B l'emporte. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 13.5

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B | A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B | A)$.

Exercice 13.6

Dans une usine, deux machines A et B produisent des pièces. On constate que A assure 60% de la production de l'usine. Cependant 5% des pièces qu'elle produit sont défectueuses alors que c'est le cas pour seulement 3% des pièces produites par la machine B.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce sortant de l'usine soit défectueuse.
2. On examine une pièce à la sortie de l'usine et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine A ?
3. Même question avec une pièce de bonne qualité.

Exercice 13.7

Étant donné $N \geqslant 2$, Indiana Jones tente de franchir N obstacles successifs, tous du même type : pour tout $i \geqslant 1$, à la i^{e} étape, il a le choix entre i portes (sans aucun indice) dont une seulement lui permet de poursuivre et les autres débouchent sur un piège mortel. Pour tout i, on définit les événements A_i : « Indiana a franchi la i^{e}étape » et B_i : « Le dernier obstacle franchi est le i^{e}. ». Évidemment, si Indiana ne franchit pas un obstacle, il ne franchit alors pas les suivants puisqu'il est mort.

1. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, calculer $\mathbb{P}(A_i)$.
2. Montrer que $\forall 1 \leqslant i \leqslant N-1$, $\mathbb{P}(B_i) = \dfrac{1}{i!} - \dfrac{1}{(i+1)!}$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(B_N)$?

Exercice 13.8 *(Indicatrice d'Euler)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers (avec les p_i tous distincts et les α_i non nuls). On appelle indicatrice d'Euler de n le nombre $\phi(n)$ d'entiers de $[\![1, n-1]\!]$ qui sont premiers avec n. On considère l'univers $\Omega = ([\![1, n-1]\!])$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Si d est un diviseur de n, on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω. Calculer $\mathbb{P}(M_d)$.
2. Montrer que les M_{p_i} sont mutuellement indépendants ($1 \leqslant i \leqslant r$).
3. En déduire que
$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i}).$$

13.2 Variables aléatoires

Exercice 13.9

Un dé pipé est tel que chaque résultat i a une fréquence d'apparition proportionnelle à i^2. On note X la variable associée au résultat du lancer de ce dé.

1. Est-il plus probable d'avoir un résultat pair ou impair ?
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 13.10

Soit X une variable aléatoire donnée par la distribution suivante :

ω	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = \omega)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$

et soit $Y = X^2$.

1. Déterminer la distribution de Y.
2. Calculer les espérances de X et Y.

Exercice 13.11

On joue 100 fois à PILE ou FACE avec une pièce non truquée. On appelle F la variable aléatoire associée au nombre de fois qu'on a obtenu FACE.

1. Quelle est la loi de F ?
2. Donner son espérance et son écart-type.
3. On considère l'événement A : obtenir un nombre de FACE strictement compris entre 40 et 60. Écrire une expression exacte de la probabilité de l'événement A puis en donner une minoration.

Exercice 13.12

La v.a. X suit une loi binomiale d'espérance 5 et d'écart-type 2. Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$.

Exercice 13.13

Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant les lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = r) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}}{\binom{m+n}{r}}.$$

On vérifiera qu'on sait encore démontrer que la somme de deux v.a. de lois binomiales de même paramètre p est une binomiale.

Exercice 13.14

Soient $X_1, \dots, X_n$ les résultats de n lancers de dé et soit $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer n tel que $\mathbb{P}(Z_n \geqslant 4) \geqslant 0,99$.

Exercice 13.15

On lance deux dés. Soit X le nombre de 1 et Y le nombre de 2. Donner la loi conjointe de X et Y ainsi que les lois marginales de (X, Y). Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?