

TD 12. Séries numériques

Exercice 12.1 Donner la nature (pour le 1. on cherchera aussi à calculer la somme le cas échéant) de chacune des séries de termes généraux

1. (a) $\frac{1}{3^n}$, (c) $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$, (d) $\frac{\ln\left(\frac{1+1}{n}\right)}{\ln(n^{\ln(n+1)})}$;
 (b) $\frac{2}{n^2-1}$,
2. (e) $\frac{1}{n^2+1}$, (j) $(-1)^n/n^2$, (o) $n \sin(1/n)$,
 (f) $\frac{2^n n!}{n^n}$, (k) $\begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$ (p) $\frac{\sin(1/n)}{n}$,
 (g) $\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$, (l) $\frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}$, (q) $(-1)^n n^2$,
 (h) $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$, (m) $\frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)}$, (r) $\begin{cases} 1/\ln(n) & \text{si } n \text{ pair,} \\ 1/\ln(1/n) & \text{sinon;} \end{cases}$
 (i) $\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$, (n) $\frac{3}{\sqrt{n}-1}$, (s) $\ln(n)/n$,
 (v) $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, (w) $\left(\frac{\ln(n)}{n} - 1\right)^n$, (t) $\frac{1}{n \sin(n^2)}$;
 (u) $\left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$, (y) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \alpha \sin(1/n)$,
 (x) $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, (z) $\int_0^{\pi/n} \frac{\sin(t) dt}{1+t^2}$.

Exercice 12.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Que dire de la nature des séries de termes généraux

1. $e^{u_n} - 1$,
2. a_n^2 ,
3. $\ln(1 + u_n)$.

Exercice 12.3

Soit $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} \end{cases}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire, en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n^\alpha}$.

Exercice 12.4 Série géométrique dérivée

Soit $x \in [0, 1[$. Étant donné $p \in \mathbb{N}$, on considère la série $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$.

1. Montrer que cette série converge, on note S_p sa somme.
2. Montrer que $x(S_p + S_{p+1}) = S_{p+1}$.
3. Exprimer S_p en fonction de p et x .

4. En déduire $\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$.

5. Que se passe-t-il si l'on remplace l'hypothèse $x \in [0, 1[$ par $x \in]-1, 1[$?

Exercice 12.5 *Transformation d'Abel*

Soit $(a_n)_n$ une suite de termes positifs décroissante et tendant vers 0. Soit (S_n) une suite bornée.

1. Montrer que $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.

2. En déduire que $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.

3. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ la convergence de $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$.

Exercice 12.6 *Un produit infini*

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k^2 + x}{k^2 + y}$. Montrer que (P_n) converge vers une limite strictement positive.