TD 7. Nombres Réels et suites numériques

7.1 Nombres réels

Dans les premiers exercices, on note $\lfloor A \rfloor = \mathrm{E}(A)$

Exercice 7.1

Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Exercice 7.2

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 7.3

1. Démontrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et étudier le cas d'égalité.
2. Démontrer que $\left| \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 7.4

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Soit $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure notée b.
2. Montrer que $f(b) = b$. *(on pourra étudier les cas $f(b) < b$ et $f(b) > b$)*

Exercice 7.5

Déterminer, si elles existent, la borne supérieure, la borne inférieure le minimum et le maximum des ensembles suivants.

1. $\left\{ \dfrac{x^2+1}{x^2+2},\ x \in \mathbb{R} \right\}$;
2. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m},\ (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
3. $\left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \right\}$,
4. $\{x \in \mathbb{Q},\ x^2 - 3x + 2 < 0\}$.

Exercice 7.6

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est majorée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
2. Énoncer un énoncé analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Que peut-on dire de $A \cap B$?

7.2 Suites numériques

Convergence de suites

Exercice 7.7 *(Moyenne de Cesàro)*

Soit (u_n) une suite qui converge vers 0. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}\right)$ converge vers 0 également. Que dire du cas de la convergence vers $\ell \neq 0$.

Exercice 7.8

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

Exercice 7.9

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} 0 < u_0, u_1 < 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}}{2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \min\{u_n, u_{n+1}\}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 7.10

Déterminer la limite des suites définies par

(a) $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$;

(b) $v_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$.

Exercice 7.11

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 6$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 3 \end{cases}$.

Que dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 7.12

Établir la convergence ou la divergence de chacune des suites ci-dessous.

(a) $u_n = \frac{\sin n}{n}$;

(b) $n^3 + 2n^2 - 5n + 1$;

(c) $\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n}$;

(d) $\frac{n^2 - n \ln n}{n^2 + n(\ln n)^2}$.

Exercice 7.13

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

1. Montrer que si l'une de ces suites converge alors l'autre converge aussi.
2. En déduire que ces deux suites sont divergentes.

Exercice 7.14

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $b_0 > a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} < b_n < b_{n+1}$.
2. Montrer que a_n et b_n convergent vers la même limite ℓ.

Comparaisons de suites

Exercice 7.15

Déterminer un équivalent et la limite quand $n \to +\infty$ des suites suivantes :

(a) $n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$,

(b) $\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$,

(c) $\left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$,

(d) $n^{1/n} - 1$,

(e) $\ln(n + \sqrt{n^2+1})$,

(f) $\dfrac{\sin(1/n)+1}{\tan(\frac{1}{n^2})}$,

(g) $e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

(h) $\ln\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2+n-3}\right)$.

Exercice 7.16

Soit $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout $k > 0$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \leqslant \dfrac{1}{k-1}$. *(on pourra utiliser une intégrale)*
2. En déduire la limite de h_n.
3. Calculer la limite de $\dfrac{h_n}{\ln n}$.
4. Conclure.

Exercice 7.17

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n le nombre réel solution de $\tan x = x$ sur $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
2. Soit $y_n = x_n - n\pi$. Montrer que $y_n \sim \pi/2$.
3. Soit $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $z_n \sim -\frac{1}{n\pi}$.