

TD 6. Matrices et systèmes

6.1 Systèmes linéaires

Exercice 6.1

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$1. \begin{cases} (2-i)x + (3+i)y = 1+2i \\ (3+2i)x + (1+5i)y = -2+3i \end{cases},$$

$$3. \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases},$$

$$2. \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases},$$

$$4. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Exercice 6.2

Soient a, b, c trois nombre réels distincts. Monter que le système $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$ est

de Cramer et résoudre $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$.

Exercice 6.3

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.4

Déterminer en fonction des paramètres le rang des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}, \quad 2. B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}, \quad 3. C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.5

Soient $n \geq 2$ un entier et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b_1 \\ x_2 + x_3 = 2b_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2b_{n-1} \\ x_1 + x_n = 2b_n \end{cases}$$

6.2 Matrices

6.2.1 Opérations

Exercice 6.6

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA .
2. Calculer ${}^t(AB)$, tA , tB et ${}^tB{}^tA$.
3. Calculer $\text{Tr } A$, $\text{Tr } B$, $\text{Tr}(AB)$ et $\text{Tr}(BA)$.
4. Développer $(A + B)^2$.

Exercice 6.7

Calculer lorsque c'est possible les produits AB et BA .

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$3. A = (1) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.3 Inverses

Exercice 6.8 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6.9

Calculer l'inverse des matrices

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2. B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3.1 Rang

Exercice 6.10

Soient X et Y deux matrices colonnes.

1. Montrer que $X^t Y$ est de rang 1.
2. Montrer que toute matrice carrée A de rang 1 peut s'écrire de la forme ci-dessus.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 6.11

Déterminer le rang des matrices suivantes. Dans l'éventualité où il serait maximal pour une matrice carrée, calculer l'inverse de la matrice.

$$\begin{array}{lll} 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & 2. B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & 3. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

6.3.2 Autres outils

Exercice 6.12

Trouver si c'est possible deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 6.13

Soient A et B deux matrices carrées telles que $AB - BA = B$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Tr}(B^k) = I_n$.