Chapitre 10

Techniques d'approximation

10.1 Approximations de réels

Proposition et définition 10.1 (Partie entière)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier p tel que $p \leqslant x < p+1$, appelé **partie entière** de x et noté $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Proposition 10.2

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x) = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $p \leqslant \mathrm{E}(x)$ si et seulement si $p \leqslant x$.
- La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous nombres réels $a > 0$ et x, il existe un unique couple $(p, r) \in \mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = pa + r$. On a alors $p = \mathrm{E}(x/a)$.

Rappel : un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{p}{10^k}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Définition 10.3

Étant donné un nombre $x \in \mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}.$$

Ces quantités sont appelées **valeur décimale approchée** de x à 10^{-n} près, respectivement **par défaut** et **par excès**.

Proposition 10.4

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est x.

10.2 Relations de comparaison

Définition 10.5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, (v_n) ne s'annulant pas àpcr.

(i) On dit que (u_n) est **dominée par** (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée àpcr et on note $u_n = O(v_n)$.

(ii) On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on note $u_n = o(v_n)$.

(iii) On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et on note $u_n \sim v_n$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les notations complètes sont de même $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

Proposition 10.6

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les suites c'est-à-dire qu'elle est

(i) réflexive : $u_n \sim u_n$;

(ii) symétrique : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$;

(iii) transitive : $(u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n) \Rightarrow u_n \sim w_n$.

Théorème 10.7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Alors

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

Remarques.

- Dire $u_n = o(1)$ revient à dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Dire $u_n \sim a$ revient à dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
- Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$, alors *a fortiori* $u_n = O(v_n)$.

Proposition 10.8 (Comparaison et limites)

Étant données deux suites réelles (u_n) et (v_n),

$$\left.\begin{array}{r} u_n \sim v_n \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell;$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = o(v_n) \text{ ou } u_n = O(v_n) \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = o(v_n) \text{ ou } u_n = O(v_n) \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 10.9

Soeint $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ définissant quatre suites réelles. Alors

(i) $u_n v_n \sim a_n b_n$;

(ii) si u_n et v_n ne s'annulent pas àpcr, $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$;

(iii) si $u_n \geqslant 0$ àpcr, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque. Attention !

- On ne somme pas d'équivalents.
- On ne compose pas les équivalents (en particulier on ne les passe pas au log ou à l'exponentielle).

Proposition 10.10

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs.

(i) Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ àpcr, alors $u_n = O(v_n)$.

(ii)
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 10.11 (Suites de référence)

Soient $x > 1$ et $\alpha, \beta > 0$. Alors

$$(\ln n)^\beta = \underset{n\to\infty}{o}(n^\alpha) \ ; \quad n^\alpha = \underset{n\to\infty}{o}(x^n) \ ; \quad x^n = \underset{n\to\infty}{o}(n!) \quad \text{et} \quad n! = \underset{n\to\infty}{o}(n^n).$$

Théorème 10.12 (Équivalents usuels)

Soit (u_n) une suite tendant vers 0. Alors

(i) $\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(ii) $\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(iii) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(iv) $1-\cos u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$;

(v) $(e^{u_n}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(vi) $\operatorname{sh} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(vii) $((1+u_n)^\alpha - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$.

Remarque. Plus généralement, on peut retenir que pour f une fonction dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$ et (u_n) qui converge vers 0, on a

$$(f(u_n)-f(0)) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)u_n.$$