Chapitre 2

Calculs algébriques

2.1 Somme et produit

Notations. Soient $(u_k)_k \in \mathbb{N}$ une suite de nombres (réels ou complexes) et $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. La somme et le produit d'éléments successifs de la suite se notent de la manière suivante.

$$u_m + \ldots + u_n = \sum_{k=m}^{n} u_k,$$

$$u_m \times \ldots \times u_n = \prod_{k=m}^{n} u_k.$$

Remarque. On peut aussi imaginer (et c'est la notation qu'on emploiera pour énoncer les propriétés en toute généralité) une famille d'éléments indexée par un ensemble fini : $(u_i)_{i \in I}$, dont on écrit la somme

$$\sum_{i \in I} u_i.$$

Proposition 2.1

Soient I un ensemble fini et $(a_i)_i \in I$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres complexes. Soit λ une constante. Alors

- $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i,$
- $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i + b_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i,$
- $\displaystyle\sum_{i \in I} (\lambda + a_i) = p\lambda + \sum_{i \in I} a_i,$
- $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i^{\lambda} = \left(\prod_{i \in I} a_i \right)^{\lambda},$
- $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i b_i = \prod_{i \in I} a_i \times \prod_{i \in I} b_i,$
- $\displaystyle\prod_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda^p \prod_{i \in I} a_i,$

où p est le nombre d'éléments de I.

Remarque. Par convention, une somme vide vaut 0 et un produit vide vaut 1.

2.2 Sommes usuelles

Théorème 2.2 (Progression arithmétique)

Soient $(u_k)_k$ une suite arithmétique de raison r et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1) \times \frac{u_m + u_n}{2}.$$

Théorème 2.3 (Progression géométrique)

Soient $(v_k)_k$ une suite géométrique de raison q et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} v_k = \frac{v_m - v_{n+1}}{1-q} = v_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

Proposition 2.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Théorème 2.5 (Identité remarquable)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2.3 Coefficients binomiaux

Définition 2.6

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** de n le nombre entier noté $n!$ et défini par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarques.

- La convention $0! = 1$ est cohérente avec celle du produit vide.
- On peut aussi la définir par récurrence par $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Définition 2.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p \in [\![0, n]\!]$, on définit le **coefficient binomial** « p parmi n » par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Remarque. On peut les définir plus généralement en posant $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Proposition 2.8

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. $\binom{n}{1} = n$.
3. Symétrie : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. Formule de Pascal :

$$\forall p < n-1, \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Proposition 2.9 (Formule du binôme)

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2.4 Sommes doubles

Notations. Étant donnés deux ensembles finis I et J, une famille d'éléments indexée par I et J se note $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ ou $(a_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$. La somme de ces éléments est notée

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_{ij}.$$

Remarque. Dans le cas particulier où $I = [\![m, n]\!]$ et $J = [\![p, q]\!]$ sont des ensembles d'entiers successifs, on note la somme

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij}.$$

Théorème 2.10 (Indexation sur un rectangle)

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Théorème 2.11 (Indexation sur un triangle)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ une famille de nombres complexes indexée par le triangle $\{(i,j) \,|\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. Alors

$$\sum_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n} \sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$