

CHAPITRE 4

NOMBRES COMPLEXES

4.1 Forme algébrique

4.1.1 Introduction

Définition 4.1

On admet l'existence d'un ensemble \mathbb{C} dont les éléments sont appelés **nombres complexes** et qui vérifie les propositions suivantes :

- (i) \mathbb{C} contient l'ensemble \mathbb{R} et les opérations d'addition et de multiplication y sont préservées.
- (ii) \mathbb{C} contient un élément i dont le carré vaut -1 .
- (iii) Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$.

Définition 4.2

Étant donné un nombre complexe z , l'écriture $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ s'appelle **forme algébrique** de z . x s'appelle **partie réelle** de z et y est sa **partie imaginaire**, notées respectivement $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.

Les nombres complexes de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ sont appelés **imaginaires purs**. On note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.

4.1.2 Calculs, conjugaison, module

Proposition 4.3

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors

- $z = z' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$,
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$,
- $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$.

Définition 4.4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 4.5

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\overline{z}} = z$.
- Étant donnés deux nombres complexes z et z' , on a
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
- $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$,

Proposition 4.6

- On peut exprimer les parties réelle et imaginaire de z par :

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

- Cela a pour conséquence que
 - z est réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$,
 - z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$,

Définition 4.7

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **module** de z le nombre *réel positif*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposition 4.8

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \in \mathbb{R}_+$. Et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z||z'|$,
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$: c'est l'*inégalité triangulaire*.

Proposition 4.9

Pour tout nombre complexe z , on a $z\overline{z} = |z|^2$.

Utilisation. Pour exprimer un nombre sous forme algébrique, il faut commencer par se débarrasser des imaginaires au dénominateur en multipliant par le conjugué :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Proposition 4.10

Tout nombre complexe non nul possède un inverse : si $z = a + ib \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Remarque. Une formule souvent utile : $\frac{1}{i} = -i$.

4.1.3 Interprétation géométrique**Définition 4.11**

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . À tout complexe $z = x + iy$, on peut associer un point du plan ayant pour coordonnées (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , ainsi qu'un vecteur du plan, de coordonnées (x, y) dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Proposition 4.12

- Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B . Alors le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$.
- Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\lambda \vec{u}$ ont pour affixes respectives $z + z'$ et λz .
- Le point d'affixe \bar{z} est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque. La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ traduit la relation $z_C - z_A = (z_C - z_B) + (z_B - z_A)$.

Proposition 4.13

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si M est le point d'affixe z , alors $|z| = OM$.
- Si \vec{u} est le vecteur d'affixe z , alors $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A et B sont deux points du plan, alors $AB = |z_B - z_A|$.

4.1.4 Résolution d'équations du second degré**Proposition 4.14**

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes et opposées.

Théorème 4.15

Étant donnés trois nombres complexes $a \neq 0$, b et c , on étudie l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (4.1)$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

- (i) Si $\Delta = 0$, l'équation (4.1) a une unique solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
 (ii) Si $\Delta \neq 0$, on appelle δ une racine carrée de Δ . Alors l'équation (4.1) a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Remarque. Si a , b et c sont réels, Δ l'est aussi. L'équation (4.1) a alors des solutions réelles si $\Delta \geq 0$ et complexes conjuguées si $\Delta < 0$.

Proposition 4.16

Avec les notations ci-dessus (z_1 et z_2 éventuellement confondues),

- on a la factorisation

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

- on a les relations

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe**4.2.1 Exponentielle complexe****Définition 4.17**

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1, appelé **cercle unité** ou **cercle trigonométrique** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Proposition 4.18

- $1 \in \mathbb{U}$,
- Si $z, z' \in \mathbb{U}$, alors $zz' \in \mathbb{U}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

Définition 4.19

Soit $z \in \mathbb{U}$ et M le point d'affixe z dans le plan complexe.

- L'angle orienté $(\vec{1}, \vec{OM})$ s'appelle **un argument** de z , noté $\text{Arg}(z)$.
- Si θ désigne un argument de z , alors on note $e^{i\theta} = z$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit le **cosinus** et le **sinus** de θ par

$$\cos(\theta) = \text{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \text{Im}(e^{i\theta}).$$

Définition 4.20

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** de z par

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Proposition 4.21

- Étant donnés deux nombres complexes z et z' , on a $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.
- Étant donnés θ et μ deux réels, on a
 - (i) $e^{i\theta} = e^{i\mu}$ si et seulement si $\theta = \mu \pmod{2\pi}$,
 - (ii) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Proposition 4.22 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 4.23 (Formule de De Moivre)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

4.2.2 Argument et forme trigonométrique

Théorème et définition 4.24

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z . Et alors

- (i) ρ est unique : c'est le module de z ,
- (ii) θ est un argument de z .

Proposition 4.25

Étant donnés deux nombres complexes z et z' , on a (à 2π près) les égalités suivantes :

- $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z$,
- $\text{Arg}(zz') = \text{Arg } z + \text{Arg } z'$ et $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z$,
- $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg } z - \text{Arg } z'$.

4.2.3 Interprétation géométrique

Proposition 4.26

Soit $z \in \mathbb{C}$.

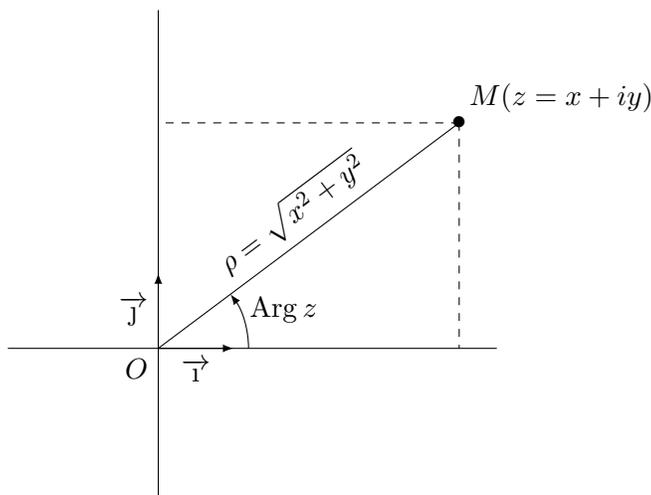
- Si M est le point d'affixe z , alors $\text{Arg } z$ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
- Si \vec{u} est le vecteur d'affixe z , alors $\text{Arg } z$ est une mesure de l'angle (\vec{i}, \vec{u}) .
- Si A et B sont deux points du plan, alors $\text{Arg}(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$.
- Si A, B, C et D sont deux points du plan, alors $\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Proposition 4.27

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixes z et z' . Alors

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\frac{z}{z'}$ est réel. De plus, ils sont de même sens si et seulement si ce quotient est positif.
- \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z}{z'}$ est imaginaire pur.

Géométrie	Complexes (algébrique)	Complexes (trigonométrique)
Plan	Nombres complexes	
Point M	Affixe $z = x + iy$	Affixe $z = \rho e^{i\theta}$
Abscisse x	Partie réelle	
Ordonnée y	Partie imaginaire	
Axe (Ox)	Nombres réels	
Axe (Oy)	Imaginaires purs	
Symétrique / (Ox)	Complexe conjugué	
$OM = \ \vec{OM}\ $	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$ z $
AB		$ z_B - z_A $
Cercle unité	$x^2 + y^2 = 1$	$ z = 1$
(\vec{i}, \vec{OM})		$\text{Arg}(z)$
(\vec{AB}, \vec{CD})		$\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$



4.2.4 Racines n -ièmes de l'unité

Soit $n \geq 1$ un entier.

Définition 4.28

Dans \mathbb{C} , on appelle **racine n -ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

Notation. L'ensemble des racines n -ièmes de l'unité est noté \mathbb{U}_n .

Théorème 4.29 (expression des racines de l'unité)

L'ensemble \mathbb{U}_n est fini, comporte exactement n éléments et

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{k}{n} 2\pi}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Remarque. En notant $\omega = e^{2i\pi/n}$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Proposition 4.30

Pour tout $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Proposition 4.31

Tout nombre complexe non nul a possède exactement n racines n -ièmes. Si $a = \rho e^{i\theta}$, ce sont les nombres

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

4.3 Transformations du plan

4.3.1 Généralités et transformations usuelles

On notera \mathcal{P} le plan complexe.

Étant donnée une application

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}, \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

on appelle **représentation (analytique) complexe** de F l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de son image M' par F . On note en général $z' = f(z)$.

Proposition 4.32

- (i) La représentation complexe de la symétrie orthogonale d'axe (Ox) (respectivement (Oy)) est

$$z' = \bar{z} \quad (\text{resp. } z' = -\bar{z}).$$

- (ii) Étant donné un \vec{u} un vecteur de \mathcal{P} d'affixe b , la représentation complexe de la translation de vecteur \vec{u} est

$$z' = z + b.$$

- (iii) Étant donnés $\lambda \in \mathbb{R}$ et Ω un point de \mathcal{P} d'affixe ω , la représentation complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est

$$z' - \omega = \lambda(z - \omega), \text{ i.e. : } z' = \omega + \lambda(z - \omega).$$

- (iv) Étant donné un angle $\theta \in \mathbb{R}$ et Ω un point de \mathcal{P} d'affixe ω , la représentation complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega), \text{ i.e. : } z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Remarques.

- On peut aussi écrire la représentation complexe d'une homothétie sous la forme

$$z' = \lambda z + (1 - \lambda)\omega,$$

et celle d'une rotation sous la forme

$$z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

- En particulier une homothétie de centre O s'écrit $z' = \lambda z$ et une rotation de centre O s'écrit $z' = e^{i\theta} z$.

4.3.2 Similitudes**Définition 4.33**

On appelle **similitude directe** une application $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui a une représentation complexe de la forme

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Proposition 4.34

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- Étant donnés quatre points M_1, M_2, M'_1 et M'_2 du plan tels que $M_1 \neq M_2$, il existe une unique similitude directe S telle que $S(M_1) = M'_1$ et $S(M_2) = M'_2$.

Proposition 4.35

Soit S la similitude directe de représentation complexe $z' = az + b$ et \vec{u} un vecteur d'affixe b .

- Si $a = 1$, alors S est la translation de vecteur \vec{u} .
- Si $a \neq 1$, alors S possède un unique point fixe Ω . On peut alors écrire

$$S = h \circ r = r \circ h$$

avec h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$ et r la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \arg a[2\pi]$.