Chapitre 8

Nombres réels et suites numériques

8.1 Corps des nombres réels

8.1.1 Relations

Définition 8.1

(i) Soit E un ensemble. On définit une **relation** $\mathcal{R}$ sur E par la donnée d'un sous ensemble de $E \times E$. Pour tout couple (x, y) dans ce sous-ensemble, on dit que x est **en relation avec** y et on note $x\mathcal{R}y$.

(ii) On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est
- ➢ **réflexive**, *i.e.* $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
- ➢ **transitive**, *i.e.* $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$;
- ➢ **symétrique**, *i.e.* $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Notations. On appelle
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs,
- $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Définition 8.2 (Relation d'ordre)

On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E est une **relation d'ordre** si
- ➢ elle est **réflexive** : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$;
- ➢ elle est **transitive** : $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$;
- ➢ elle est **antisymétrique** : $\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

Proposition 8.3

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec la somme et le produit. En particulier,
- $\left.\begin{array}{r} a \leqslant b \\ a' \leqslant b' \end{array}\right\} \Rightarrow a + a' \leqslant b + b'$;
- $\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant a' \leqslant b' \end{array}\right\} \Rightarrow aa' \leqslant bb'$.

Remarque. Attention au sens des inégalités lors de la multiplication par un nombre négatif ou du passage à l'inverse notamment.

8.1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 8.4

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si et seulement si pour tous $a, b \in X$, $[a, b] \subset X$.

Remarque. $[a, b] = \{ta + (1-t)b,\ t \in [0, 1]\}$.

Il y a 10 types d'intervalles de $\mathbb{R}$: $\emptyset, \mathbb{R},]a, b[, [a, b], [a, b[,]a, b], [a, +\infty[,]a, +\infty[,]-\infty, b[,]-\infty, b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

Définition 8.5

On appelle **droite réelle achevée** l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

8.1.3 Valeur absolue

Définition 8.6

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x est $|x| = \max(-x, x)$.

Proposition 8.7

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = r \Rightarrow x = \pm r$;
- $|xy| = |x||y|$;
- $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$ (avec $x \neq 0$) ;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ |x^n| = |x|^n$;
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;
- $|x| \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r$;
- $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$;
- $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$;
- $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Théorème 8.8 (Inégalités triangulaires)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y| \quad \text{et} \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Remarque. La partie droite de l'inégalité ci-dessus est valable (par récurrence) pour une somme de plusieurs termes.

Proposition 8.9

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre

(i) $x = 0$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $|x| \leqslant \varepsilon$.

8.1.4 Bornes supérieure et inférieure

Définition 8.10 (Bornes supérieure et inférieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Sous réserve d'existence,

(i) on appelle **borne supérieure** de A le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A.

(ii) on appelle **borne inférieure** de A le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A.

Notations. On note $\sup A$ et $\inf A$ ces éléments.

Proposition 8.11

(i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

(ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition 8.12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha < \sup A \Leftrightarrow \exists a \in A,\ \alpha < a.$$

Proposition 8.13 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre

(i) $s = \sup A$;

(ii) s est un majorant de A et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha \in A$, $s - \varepsilon < a$.

Remarque. De même on a équivalence entre

(i) $i = \inf A$;

(ii) i est un minorant de A et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b \in A$, $b < i + \varepsilon$.

8.2 Suites numériques

8.2.1 Généralités

Définition 8.14

On appelle **suite de nombres réels** une famille de nombre réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

On note alors $u_n = u(n)$, appelé **terme général** de la suite.

Notations. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et une suite u sera le plus souvent définie par son terme général et notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Remarque. Une suite peut être simplement définie à partir d'un certain rang (àpcr) n_0. On la note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition 8.15

Étant données deux suites (u_n) et (v_n) et un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les opérations de **somme**, **produit** et **multiplication par un scalaire** par

- $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$,
- $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$,
- $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$.

Définition 8.16 (Ordre)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est

(i) **majorée** si l'ensemble de ses termes est majoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M;$$

(ii) **minorée** si l'ensemble de ses termes est minoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n;$$

(iii) **bornée** si elle est minorée et majorée.

Définition 8.17 (Monotonie)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est

(i) **croissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant u_{n+1};$$

(ii) **décroissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \leqslant u_n;$$

(iii) **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

(iv) On dit que (u_n) est **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **strictement monotone** si les inégalités ci-dessus sont strictes.

Remarque. On aura souvent simplement besoin de vérifier ces propriétés **à partir d'un certain rang**, c'est à dire que la propriété en question sera vraie pour tout $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite constante à partir d'un certain rang s'appelle une suite **stationnaire**.

8.2.2 Convergence

Définitions

Définition 8.18

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N},\, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Si un tel réel ℓ existe, on dit que la suite est **convergente** et sinon on dit qu'elle est **divergente**.

Théorème et définition 8.19 (Unicité de la limite)

Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ et vers ℓ'. Alors $\ell = \ell'$, ce nombre s'appelle alors **la limite** de la suite u et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Proposition 8.20

La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Proposition 8.21

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 8.22

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels

Proposition 8.23

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $\ell > a$, alors (u_n) est minorée par un réel $m > a$ àpcr.
- Si $\ell < a$, alors (u_n) est majorée par un réel $M < a$ àpcr.
- Si $\ell \neq a$, alors $u_n \neq a$ àpcr.

Opérations sur les limites

Proposition 8.24 (Somme, produit)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

(i) la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$;

(ii) la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

Proposition 8.25 (Inverse)

Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \neq 0$. On peut supposer $u_n \neq 0$ (quitte à faire l'étude àpcr). Alors la suite $(1/u_n)$ converge vers $1/\ell$.

Proposition 8.26 (Valeur absolue)

Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Proposition 8.27 (Ordre)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

(i) Si $u_n \leqslant v_n$ àpcr, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

(ii) Si $u_n \leqslant a$ àpcr, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant a$.

(iii) Si $u_n \geqslant a$ àpcr, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geqslant a$.

Remarque. Les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Théorème 8.28 (Encadrement, gendarmes)

Soient $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose
- $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ àpcr,
- (u_n) et (w_n) convergent toutes deux vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors (v_n) converge également vers ℓ.

Remarque. Un cas particulier : si $|u_n| \leqslant v_n$ àpcr avec v_n qui converge vers 0, alors u_n aussi.

Suites extraites

Définition 8.29

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (v_n) est une **suite extraite** ou une **sous-suite** de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Proposition 8.30

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Remarque. En particulier pour montrer qu'une suite bornée n'est pas convergente, il suffit de trouver deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes.

Limites infinies

Définition 8.31

On dit qu'une suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ (et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

On dit qu'une suite (u_n) **tend vers** $-\infty$ (et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant B).$$

Remarque. Une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) n'est pas majorée (resp. pas minorée). En particulier, elle diverge.

Proposition 8.32

La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Proposition 8.33

– Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_n|$ tend vers $+\infty$. Alors $(1/u_n)$ converge vers 0.
– Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_n|$ tend vers 0. Alors $(1/u_n)$ diverge. De plus,
  ➢ si $u_n > 0$ àpcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$,
  ➢ si $u_n < 0$ àpcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$,

Proposition 8.34

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors

(i) si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

(ii) si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Monotonie

Théorème 8.35 (Limite monotone)

(i) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante.
  - Si (u_n) est majorée, alors elle converge vers $\ell = \sup\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
  - Si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

(ii) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
  - Si (u_n) est minorée, alors elle converge vers $\ell = \inf\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
  - Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Définition 8.36 (Suites adjacentes)

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si

(i) (u_n) est croissante,

(ii) (v_n) est décroissante,

(iii) $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 8.37

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors (u_n) et (v_n) tendent vers la même limite ℓ qui, de plus, vérifie $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.