Devoir maison n° 3

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
On s'attachera à proposer une rédaction absolument personnelle des solutions.

- **Rattrap'cours obligatoire si les interros de cours sont insuffisantes**
- **si NOTE(DS2) $<$ 10 : Ex.2 ET Pb.1A obligatoires**
- **si NOTE(DS2) $>$ 10 : Pb.1A ET (Pb.1BC OU Pb.2) obligatoires**

Exercice 1 **(Rattrap'cours)**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$
   (a) $z^2 + (5+i)z + (8+i) = 0$,
   (b) $z^6 = -1$,
2. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on définit $z' = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que
   (a) $|z'| = 1$,
   (b) $z' \in i\mathbb{R}$,
3. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 2 ***(Une formule trigo de plus à afficher ?)***

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1. Monter que si $z, z' \in \mathbb{U}_n$, alors $zz' \in \mathbb{U}_n$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.
2. Soit $u = e^{i\frac{2\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$.
   (a) Justifier que $u^{11} = 1$ et que $\overline{u} = \frac{1}{u}$.
   (b) En déduire que S et T sont conjugués.
   (c) Montrer avec un minimum de calculs que la partie imaginaire de S est positive.
   (d) Montrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$.
   (e) En déduire les valeurs de S et T.
3. Par définition, $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}$.
   (a) Montrer que $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{u^3-1}{u^3+1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-u^3)^k$ *(on pourra penser aux formules d'Euler et à une somme géométrique).*
   (b) Montrer que $2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = (u - u^{10})$.
   (c) En déduire que
   $$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T-S) = \sqrt{11}.$$

$\boxed{\textbf{Problème 1}}$

Dans ce problème, on étudie une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone soit régulier. Après quelques variations autour de l'inégalité triangulaire (partie A), on en viendra à la condition proprement dite (partie B). La partie C est l'étude du cas où le polygone en question est un triangle.

Partie A. Autour de l'inégalité triangulaire

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité triangulaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|. \tag{1}$$

Le but de cette partie est d'étudier le cas de plus de deux nombres et les cas d'égalité. En particulier, on va montrer qu'il y a égalité si et seulement si les nombres considérés ont même argument.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$ et tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$,

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n| \tag{2}$$

2. Cas d'égalité dans le cas $n = 2$.
   (a) Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2|$.
   (b) En déduire que l'on a l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\arg(z_1) = \arg(z_2)[2\pi]$.
3. On suppose que l'on a la propriété au rang n, c'est à dire :

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n| \text{ si et seulement si } \arg(z_1) = \ldots = \arg(z_n)[2\pi].$$

   Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tels que

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

   (a) Montrer que

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n| \quad \text{et} \quad |z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

   Indication : on pourra poser $z = z_1 + \ldots + z_n$, $z' = z_{n+1}$ et utiliser judicieusement (1) *et* (2).
   (b) En déduire que $\arg(z_1) = \ldots = \arg(z_{n+1})[2\pi]$. Conclure.

Partie B. Caractérisation d'un polygone régulier

Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $M_1, \ldots, M_n$ des points du plan d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$ vérifiant $|z_1| = \ldots = |z_n| = \rho > 0$.

On dit que le polygone (parcouru dans le sens direct) $M_1 \ldots M_n$ est régulier si

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \ldots = (\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_n}) = (\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_0}) = \frac{2\pi}{n}.$$

On va montrer que le polygone $M_1 \ldots M_n$ est régulier si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1.$$

1. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.
   (a) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, déterminer le module et un argument de z_k.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = nz_1$.
2. On suppose maintenant réciproquement que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = nz_1$.
   (a) Calculer $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k\right|$. En déduire que

$$\forall k \in \{1 \dots n\},\ \arg(\omega^{n+1-k} z_k) = \arg(z_1)[2\pi].$$

   (b) En déduire que le polygone est régulier.

Partie C. Le cas d'un triangle équilatéral

Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

3. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$.
4. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2c = 0$. En déduire que le triangle ABC a deux côtés égaux et un angle de mesure $\pm\frac{\pi}{3}$. Conclure.
5. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.
   (a) Dans le cas où $|a| = |b| = |c|$, montrer comment la condition de la partie C implique que $a + jb + j^2c = 0$. *(indication : on pourra appliquer cette condition à a, b et c, puis à b, c et a, et encore à c, a et b)*
   (b) Dans le cas où a, b et c ne sont pas de même module, on pose

$$a' = a - \frac{a+b+c}{3}\ ;\ b' = b - \frac{a+b+c}{3} \ \text{ et } \ c' = c - \frac{a+b+c}{3}.$$

   Montrer que $a' + jb' + j^2c' = 0$ si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$. Montrer que $|a'| = |b'| = |c'|$ et conclure.

Problème 2 *Théorème de Cantor-Bernstein*

La première partie du problème a pour but de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein selon lequel

> Étant donnés deux ensembles non vides E et F, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.

Dans la deuxième partie, on aborde un exemple célèbre.

Le théorème

Soient E et F deux ensembles non vides. On suppose qu'on a $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications toutes deux injectives.

1. Dans cette question, on considère $A \subset E$ et $B \subset E$ deux parties qui vérifient

   (i) $A \cap B = \emptyset$

   (ii) $A \cup B = E$

   (iii) $B \subset g(F)$

   (iv) $f(A) \cap g^{-1}(B) = \emptyset$

   (v) $f(A) \cup g^{-1}(B) = F$

   (a) Montrer que tout $a \in B$ admet un antécédent par g et qu'il est unique. On le notera $\widetilde{g}(a)$.

   (b) On pose, pour tout $x \in E$, $h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A, \\ \widetilde{g}(x) \text{ si } x \in B \end{cases}$.

   Montrer que cela permet de définir une application $h : E \to F$ et que h est alors bijective.

2. On définit une suite de parties de E par $\begin{cases} D_0 = E \setminus g(F) \\ \forall n \in \mathbb{N},\, D_{n+1} = g(f(D_n)) \end{cases}$.

   Puis on définit $A \subset E$ comme la réunion de tous les ensembles D_n pour $n \in \mathbb{N}$ (ceci se note $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$) et on définit enfin B comme $E \setminus A$, c'est-à-dire le complémentaire de A dans E.

   Montrer que les ensembles A et B ainsi définis vérifient les cinq conditions de la question 1.

3. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

Un exemple célèbre

Soient X et Y deux ensembles. On dit que X est **équipotent** à Y s'il existe une bijection $u : X \to Y$. On note alors $X \sim Y$.

4. Propriétés de la relation d'équipotence.

   (a) Montrer que, pour tout ensemble X, on a $X \sim X$.

   (b) Montrer que, pour tous ensembles X et Y, on a $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$.

   (c) Montrer que, pour tous ensembles X, Y et Z, $X \sim Y$ et $Y \sim Z$ impliquent $X \sim Z$.

5. On définit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p, q) & \mapsto & 2^p \times 3^q \end{array}.$$

   (a) Montrer que f est injective.

   (b) Construire une injection g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$.

   (c) En déduire que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents.