

**La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.**

On s'attachera à proposer une rédaction absolument personnelle des solutions.

- **Ex 1 pour tout le monde**
- **si DS3 < 8 : Pb 1 obligatoire**
- **si DS3 > 10 : Pb 2 obligatoire**
- **sinon : au choix**
- **facultatif : l'autre problème 2 du DS 4**

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice A .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ (en discutant selon les valeurs de λ) le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 0 \\ 2x + y + \lambda z + 2t = 0 \\ x + \lambda y + 4z + t = 0 \end{cases}.$$

3. Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère, on considère les plans d'équations

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: x + y + 2z - 1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 &: 2x + y + \lambda z - 2 = 0 \\ \mathcal{P}_3 &: x + \lambda y + 4z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Déterminer les valeurs de λ telles que l'intersection de ces trois plans soit une droite et en exprimer une représentation, (par exemple sous forme paramétrique).

Problème 1

On considère l'équation différentielle

$$xy' - y + x = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions de cette équation séparément sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Existe-t-il des solutions (donc continues, dérivables) de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. On s'intéresse maintenant aux solutions définies sur $]0, +\infty[$. Étant donnés $x_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, donner l'expression de la solution de (E) qui vaut y en x_0 .
4. Si on appelle $\mathcal{C}_0$ la courbe intégrale correspondante, donner une équation de la tangente en x_0 à $\mathcal{C}_0$.
5. x_0 étant fixé, montrer que toutes les tangentes obtenues en faisant varier y_0 dans $\mathbb{R}$ tout entier sont concourantes en un point que l'on précisera.
6. Montrer que les courbes intégrales de toutes les solutions de (E) admettent toutes un maximum sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer le lieu des points correspondants.

7. Représenter l'allure de quelques courbes intégrales, les tangentes et les maxima évoqués dans les questions précédentes.

Problème 2

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
 - (a) Déterminer $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
 - (b) Montrer que f est impaire.
2. Soit $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose (dans cette question) dérivable sur $]0, +\infty[$.
 - (a) Montrer que f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = kx \tag{E}$$

où k est une constante (dépendant de f) à déterminer.

- (b) Résoudre cette équation différentielle sur $]0, +\infty[$.
 - (c) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$ en fonction de k .
3. Soit f_1 l'unique fonction appartenant à $\mathcal{E}$, telle que $f_1'(1) = 1$.
 - (a) f_1 est-elle dérivable en 0 ?
 - (b) Esquisser l'allure de f_1 .
4. Soit $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose (dans cette question) seulement continue. On note F sa primitive s'annulant en 0.
 - (a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, F(xy) = x^2 F(y) + \frac{xy^2}{2} f(x).$$

- (b) En déduire que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
 - (c) Déterminer $\mathcal{E}$.