Devoir maison n° 7

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
On s'attachera à proposer une rédaction absolument personnelle des solutions.

- **Dénombrement : ex. 1 ou ex. 2 (similaires, le 1 étant un peu plus facile)**
- **Matrices : ex. 3 (facile) ou pb. 1 (moins facile)**

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On note $S(n,p)$ le nombre de n-uplets d'entiers $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$$

Autrement dit, $S(n,p)$ représente le nombre de manières de décomposer p en n morceaux *(Attention : l'ordre de ces morceaux compte. Attention aussi : dans le cas où n vaut 1 ou 2, l'écriture ci-dessus est légèrement incorrecte).*

Par exemple $S(3,3) = 10$ car $3 = 0+0+3 = 0+3+0 = 3+0+0 = 0+1+2 = 0+2+1 = 1+0+2 = 1+2+0 = 2+0+1 = 2+1+0 = 1+1+1$.

1. Première méthode de calcul.
   (a) Déterminer les valeurs de $S(n,0)$, $S(n,1)$, $S(n,2)$, $S(1,p)$, $S(2,p)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,
   $$S(n+1,p) = \sum_{k=0}^{p} S(n,k).$$
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$,
   $$S(n,p) = \binom{n+p-1}{p}.$$
2. Seconde méthode de calcul.
   (a) Si un mot est constitué de α fois la lettre A et β fois la lettre B, combien peut-on former d'anagrammes de ce mot ?
   (b) En l'exprimant en termes d'anagrammes faisant intervenir notamment le caractère « + », établir la valeur de $S(n,p)$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = [\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Pour tous $p, k \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{p,k}$ le nombre d'applications surjectives $A_p \to A_k$.

1. Montrer que
   (a) $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S_{p,1} = 1$,
   (b) $\forall p, k \in \mathbb{N}^*,\ k > p \Rightarrow S_{p,k} = 0$,
   (c) *(question difficile : n'hésitez pas à l'admettre pour la suite)* $\forall p, k \in \mathbb{N}^*,\ S_{p+1,k} = k(S_{p,k} + S_{p,k-1})$.
2. Exprimer $S_{p,k}$ pour $1 \leqslant p, k \leqslant 6$. *(on présentera de préférence le résultat sous forme de tableau)*
3. Calculer (en justifiant) $S_{p,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = S_{p,2} + 2$. Montrer que (u_p) est une suite géométrique et en déduire les valeurs de $S_{p,2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k} S_{p,k} = n^p.$$
(on conseille de s'orienter vers un calcul de dénombrement même si une démonstration par récurrence aboutit également au prix d'efforts plus importants)

Exercice 3

On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et on note $I = I_3$.

Calcul de puissance

Soit $B = \frac{1}{4}(A - I)$.

1. Calculer B^2, B^3 puis en déduire une expression simple de B^n pour tout $n \geqslant 1$.
2. Exprimer A en fonction de B puis en déduire (on pourra le montrer par récurrence) qu'il existe une suite a_n telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I + a_n B.$$
3. En établissant que la suite a_n est arithmético-géométrique, exprimer a_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 0$.
5. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Qu'observez-vous pour l'expression trouvée à la question (4) ?

Calcul de puissance, le retour

On pose maintenant $C = \frac{1}{4}(A + 3I)$.

6. Calculer C^2 puis C^n pour tout $n \geqslant 0$.
7. La matrice C est-elle inversible ?
8. Donner, pour tout $n \geqslant 0$, une expression de A^n en fonction de n, I et C. Comparer avec le résultat de la question (4).

Problème 1 **(Séries chronologiques)**

On définit les suites (a_n), (b_n) et (c_n) par $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2c_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + 4c_n \end{cases}$$

Dans toute la suite, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Montrer que pour tout n, on peut écrire $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice 3×3 à déterminer. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = J + 2I_3$.
4. Calculer J^2, J^3 puis déterminer une expression de J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = 2^n I_3 + (3^n - 2^n)J.$$
6. En déduire enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_n = 2^{n+2} - 3^{n+1} \\ b_n = 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ c_n = 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{cases}.$$
7. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire
$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$$
8. Donner la définition d'une matrice inversible.
9. Déduire de la question 7 que A est inversible et déterminer A^{-1}.
10. On considère dans cette question que $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$.
    (a) Si $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, déterminer a_0, b_0, c_0.
    (b) Plus généralement, si pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, $a_n = b_n = c_n = 1$, que valent a_0, b_0, c_0 ?