PCSI Jacam *06/09/2017*

Devoir surveillé n° 1 *(durée : 3 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

Pour tout nombre réel $k > 0$, on définit la fonction h_k par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ h_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On notera $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Soit k un nombre réel strictement positif.

1. Exprimer la dérivée de h_k.
2. Montrer que la fonction h_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en $x = \ln(k)$.
3. Calculer les limites de h_k en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser le tableau de variations complet.
4. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la quantité $h_k(x) - x$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathscr{C}_k$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
5. Étant donnés deux réels $k_1 < k_2$, déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_{k_1}$ et $\mathscr{C}_{k_2}$.
6. À l'aide des informations ci-dessus et des valeurs $h_k(0)$, tracer sur un même graphique l'allure des courbes $\mathscr{C}_{1/2}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ *(on donne* $\ln(2) \simeq 0{,}7$*)*.
7. On note A_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ correspondant au minimum de la fonction h_k. Montrer que pour tout $k > 0$, le point A_k appartient à une même droite dont on donnera l'équation.

Exercice 2

On considère le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $(0,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. À tout point M d'affixe $z \neq 0$, on associe les points M' et M'' d'affixes respectives $z' = iz$ et $z'' = z^2$.

Préambule

1. Étant donnés trois points A, B et C d'affixes respectives a,b et c, montrer qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$. *(On pourra utiliser ce résultat si on n'a pas réussi à le démontrer.)*
2. Étant donnés trois points A, B et C d'affixes respectives a,b et c, exprimer le rapport de longueurs $\dfrac{AC}{AB}$ en fonction du nombre complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$.

Cas particulier

Soient A et B d'affixes $a = 2 - i$ et $b = 2 + i$.

3. Déterminer sous forme algébrique les affixes a', a'', b' et b'' des points A', A'', B' et B'' associés.
4. Montrer que A est le milieu du segment $[A'A'']$.
5. Donner la forme algébrique de $\dfrac{b-b''}{b-b'}$.
6. En déduire la nature du triangle $BB'B''$.

Cas général

Soit M un point du plan, différent de O, et on écrit son affixe $z = x + iy$ sous forme algébrique. Soit N le point d'affixe $\overline{z}$.

7. Montrer que si $z \neq 1$, l'angle $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''})$ a pour mesure un argument de $\dfrac{z-1}{i-1}$.
8. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que les points M, M' et M'' soient alignés.
9. On suppose que $z \neq 1$ et que la relation trouvée à la question précédente est vérifiée. Montrer que le triangle $NN'N''$ est rectangle en N.

Problème 1

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,1]$ la fonction f_k par

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx,$$

prolongée en $x = 0$ par $f_k(0) = 0$. On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Dans ce même repère, on place les points $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(1,1)$.

A Étude de f_0

Dans cette partie, on étudie la fonction $f_0 : x \mapsto x(\ln x)^2$.

1. Étude de la dérivée.
   (a) Calculer la dérivée de f_0 sur $]0,1]$ et montrer qu'elle peut s'écrire
   $$f_0'(x) = (\ln x)(2 + \ln x).$$
   (b) Déterminer le signe de $f_0'(x)$ sur $]0,1]$.
2. Étude en 0.
   (a) Calculer $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$. En déduire $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}}$ puis $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{(\ln u)^2}{u}$.
   (b) En déduire la limite de f_0 en 0 et que f_0 est continue en 0.
   (c) Étudier la dérivabilité en 0 de f_0 et en donner une interprétation graphique.
3. Tracé de la courbe.
   (a) Établir le tableau de variations de f_0.
   (b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_0$.

B Étude générale de f_k

4. Exprimer la dérivée de f_k sur $]0,1]$.
5. Soit A_k le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse 1. Montrer que la tangente à $\mathscr{C}_k$ en A_k est la droite (OA_k).
6. Montrer que f_k est continue en 0 et étudier sa dérivabilité en 0.

C Étude de f_1 et $f_{1/2}$

7. Étude de f_1.
   (a) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_0$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.
   (c) Établir le tableau de variation de f_1 et tracer $\mathscr{C}_1$ sur la même courbe que $\mathscr{C}_0$. On précisera le coefficient directeur de la tangente en A_1.
8. Étude de $f_{1/2}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$,
   $$f_{1/2}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}.$$
   (b) En déduire une construction point par point de $\mathscr{C}_{1/2}$ à partir des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. Tracer $\mathscr{C}_{1/2}$ sur le même graphique que précédemment en précisant l'équation de sa tangente en $A_{1/2}$.

D Partage équitable (mais compliqué) d'un gâteau carré

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$. On note u et v les fonctions définies sur $]0,1]$ par

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2.$$

9. Calcul d'une intégrale. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x(\ln x)^2 \mathrm{d}x$.
   (a) Calculer la dérivée de u. En déduire $\displaystyle\int_\alpha^1 x \ln x \mathrm{d}x$.
   (b) Calculer la dérivée de v.
   (c) En déduire que
   $$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln \alpha)^2 - \int_\alpha^1 x \ln x \mathrm{d}x.$$
10. Calcul d'aires On pose $S_k(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 f_k(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de α. En déduire la limite S_k de $S_k(\alpha)$ quand α tend vers 0.
   (b) On admet que S_k représente l'aire du domaine plan limité par les axes, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $\mathscr{C}_k$. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{1/2}$ et $\mathscr{C}_1$ partagent le carré $OIJK$ en quatre parties de même aire.