PCSI Jacam *20/12/2017*

Devoir surveillé n° 4 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + e^{1-t}}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1-t}}{e^t + e^{1-t}}\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que les intégrales I et J sont bien définies.
   (b) Calculer $I + J$.
   (c) Montrer que $I = J$ (on pourra effectuer le changement de variable $x = 1 - t$)
   (d) En déduire la valeur de I et J.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))\mathrm{d}t$ (on pourra penser à l'intégration par parties).

Exercice 2 *(Les intégrales de Wallis)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie l'intégrale définie par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0, W_1, W_2 et W_3.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que
$$W_{n-2} - W_n = \frac{1}{n-1} W_n.$$
indication : on pourra remarquer que $W_{n-2} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2} \sin^2 t \mathrm{d}t$ et effectuer une intégration par parties (...bien choisies...).
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \dfrac{2}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
4. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \leqslant W_n$.
6. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
7. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} W_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1$ et en déduire la limite de W_n quand n tend vers $+\infty$.

Problème 1

A Un peu d'hyperbolique...

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction th par

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Effectuer l'étude **complète** de la fonction th jusqu'à donner une allure de sa courbe représentative.
2. Démontrer que th réalise une bijection en précisant les ensembles de départ et d'arrivée. On appelle g sa bijection réciproque. Effectuer l'étude complète de g jusqu'à donner une allure de sa courbe représentative.

B Une fonction...

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit f_λ par

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}.$$

3. Quel est l'ensemble de définition et le domaine de dérivabilité de f_λ ? Calculer sa dérivée.
4. En déduire les variations de f_λ et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th}\left(\frac{\lambda x}{2}\right).$$

6. Supposons $\lambda > 0$. Expliquer comment l'allure de la courbe représentative de f_λ se déduit de celle de la question 1. Quelle propriété géométrique possède-t-elle ? Tracer une allure de cette courbe.

C Et quoi ? Si on différentiait l'non linéaire ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle et la condition initiale

$$f' = \lambda f(f-1) \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{2} \tag{E}$$

On admettra que les solutions de cette équation sont définies sur $\mathbb{R}$ et qu'elles ne s'annulent pas.

7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On pose $g = \frac{1}{f} - 1$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle avec condition initiale que l'on déterminera.
8. Résoudre cette équation puis, à l'aide de la partie précédente, résoudre totalement l'équation (E).

Problème 2

A Premier ordre

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$xy' - y = \ln(x) \tag{E1}$$

d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

1. Écrire puis résoudre l'équation homogène associée à (E1).
2. Résoudre l'équation (E1).
3. Déterminer l'unique solution f de (E1) qui vérifie $f(1) = 0$.

B Second ordre

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x^2y'' - xy' + y = -1 - \ln x \tag{E2}$$

d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On examine également l'équation homogène associée

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \tag{H}$$

dont on note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions.

4. Montrer que si $f,g \in \mathcal{S}_0$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0$.
5. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $f_1 : x \mapsto x^n$ soit une solution de (H).

Pour toute fonction $z :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on note $y : x \mapsto xz(x)$.

6. Montrer que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Montrer que y est solution de (H) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle homogène (H') que l'on déterminera.
8. Résoudre (H').
9. Résoudre (H).
10. (a) Soit f_P une solution de (E2). Montrer que f est solution de (E2) si et seulement si $(f - f_P)$ est solution de (H).
    (b) Montrer que $x \mapsto -1 - \ln x$ est une solution de (E2) sur $]0, +\infty[$.
    (c) Déterminer toutes les solutions de (E2).
11. Déterminer l'unique solution f de (E2) qui vérifie $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

Sujet B :

Problème 2

On considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + y = x^3 - x^2 \tag{E}$$

et l'équation homogène associée

$$x^2y'' + y = 0 \tag{H}$$

Dans tout le problème on se place sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$. On notera classiquement

$$j = e^{2i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A Résolution de l'équation

A.1 Trouver une solution particulière y_1 de (E) sur I sous la forme d'un polynôme de degré 3.

A.2 Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - y_1$ est solution de (H).

A.3 On pose la fonction auxiliaire $z = xy' + jy$.

  (a) Montrer que y est solution de (H) si et seulement si z est solution de l'équation

$$xz' + j^2z = 0 \tag{H'}$$

  (b) Résoudre (H') et en donner les solutions à valeurs complexes.

  (c) En déduire les solutions complexes de (H).

  (d) Déterminer les solutions complexes de (E) puis les solutions réelles de (E) sur l'intervalle I.

B Autre méthode de résolution de (E)

Pour $x \in I$, on pose $t = \ln x$ et si $x \mapsto y(x)$ est une fonction deux fois dérivable sur I, on définit la fonction $g : t \mapsto y(e^t)$.

B.1 Pourquoi g est-elle alors bien définie sur $\mathbb{R}$.

B.2 Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$g'' - g' + g = e^{3t} - e^{2t} \tag{E'}$$

B.3 Résoudre (E') et donner les solutions réelles pour g.

B.4 En déduire les solutions réelles pour y sur I.

C Autre méthode de résolution de (H)

Pour $x \in I$, on pose $y(x) = z(x)e^{-j \ln x}$.

C.1 Montrer que y est solution de (H) si et seulement si z est solution de l'équation

$$xz'' - 2jz' = 0 \tag{K}$$

C.2 Résoudre (K) afin d'en obtenir les solutions complexes.

C.3 En déduire les solutions complexes puis les solutions réelles de (H) sur I.