DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Problème 1

Le but de l'exercice est de trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1). \tag{1}$$

(On précise si besoin que $P(X)$, $P(X^2)$ et $P(X-1)$ désignent bien le polynôme P évalué en (ou composé avec) respectivement X, X^2 et $X-1$, et en aucun cas le produit de P par X, X^2 ou $X-1$)

1. Trouver tous les polynômes constants qui vérifient l'équation (1).
2. Donner la factorisation en produit d'irréductibles du polynôme $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire que le polynôme $X^2 + X + 1$ vérifie l'équation (1).

Dans la suite du problème, on suppose que le polynôme P est non constant et vérifie l'équation (1).

4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si α est une racine de P alors α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont également des racines de P.
5. On suppose que 0 est une racine du polynôme P et on définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   (b) Montrer que la suite (u_n) n'est pas convergente. En déduire le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = 0$.
   (d) En déduire que 0 n'est pas une racine de P.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ une racine de P.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est une racine de P.
   (b) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^k = 1$.
   (c) Montrer que $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.
   (d) A l'aide de la condition précédente, trouver toutes les racines de P.
7. Montrer que l'ensemble des solutions non nulles de l'équation (1) est l'ensemble des polynômes $P = (X^2 + X + 1)^m$ où $m \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{Problème 2}}$

L'objectif du problème est de calculer :

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

où $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que :

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{cotan} & : & \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array}$$

On considère la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, $(P_n)_{n\geq 0}$, définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n' \quad (\bigstar) \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer P_1 et P_2.
   (b) Montrer que : $\deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans P_n.
   (c) Montrer que : $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Donner le degré de P_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. On pourra procéder par récurrence. Que dire de la parité du polynôme P_n ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}' = (n+2)P_n$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
   (c) En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\int_0^x P_n(t)\mathrm{d}t.$$
   Calculer, grâce à cette formule, P_3 et P_4.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = P_n(x)$. À l'aide de la relation trouvée à la question précédente, exprimer u_n en fonction de n et x. On pourra reconnaître une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$$
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme P_n admet n racines réelles que l'on exprimera à l'aide de la fonction cotan.
   (b) Factoriser le polynôme P_n.
   (c) Calculer le produit des racines de P_n. En déduire la valeur de S_n selon $n \in \mathbb{N}$.

Problème 3

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x + x$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la valeur de α_1.
3. (a) Étudier le sens de variation de la suite (α_n).
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\frac{n}{2} \leqslant \alpha_n \leqslant n.$$
   (c) En déduire la limite de la suite (α_n).
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n)}{n}$.
   (b) Montrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
   (c) Calculer, si elle existe, la limite de $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.
5. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par
   $$u_n = \frac{n - \alpha_n}{\ln n}.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a
   $$1 - u_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln n}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite éventuelle.
   (c) Montrer que $\ln\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln \alpha_n}{\alpha_n}$.
   (d) En déduire que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Problème 4

Dans tout le problème, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

Préliminaire

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.

A Définition

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle $E_n = \{u_k, k \geqslant n\}$.
   (a) Montrer que E_n admet une borne supérieure et une borne inférieure.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sup E_n$ et $i_n = \inf E_n$.

   (b) Montrer que (s_n) est décroissante et que (i_n) est croissante.

   (c) Montrer que les suites (s_n) et (i_n) sont convergentes. On notera dans la suite

   $$L_s = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \text{et} \qquad L_i = \liminf(u) = \lim_{n\to+\infty} i_n.$$

   Le nombre L_s est appelé limite supérieure de (u_n) et aussi noté $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$. De manière analogue, L_i est appelé limite inférieure de (u_n) et noté $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Déterminer les suites (s_n), (i_n) ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants :
   (a) la suite (u_n) est constante égale à 0 ;
   (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$;
   (c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

B Lien avec la convergence

3. On suppose (seulement pour cette question) que $L_s = L_i$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de (u_n). On suppose que (v_n) est convergente. Montrer alors que

   $$L_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant L_s.$$

5. Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $L_s = L_i = \ell$.
6. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui soit convergente et de limite L_s.

C Un dernier raffinement

7. On note $(v_n) = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n) = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que

   $$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \max\{\limsup_{n\to+\infty} v_n, \limsup_{n\to+\infty} w_n\} \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \min\{\liminf_{n\to+\infty} v_n, \liminf_{n\to+\infty} w_n\}.$$