Devoir surveillé n° 8 *(durée : 4 heures)*

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Problème 1

L'échauffement est indépendant de la suite du problème. Simplement, il rappelle quelques résultat que vous êtes libres d'utiliser par la suite.

A Échauffement

1. Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphisme de E. Montrer que
$$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v.$$
2. On définit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant :
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-4y \\ x-2y \end{pmatrix} \end{array}$$
On ne demande pas de montrer que cette application est linéaire.
   (a) Déterminer A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire sur $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$?
   (c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
   (d) Soit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $f(X)$ et montrer que $(X, f(X))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On la notera $\mathcal{E}$.
   (e) Donner la matrice C de f dans cette base et expliciter P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$. Quelle relation lie A, C et P ?

B Généralités en dimension 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, Id désigne l'application identité de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note usuellement $f^2 = f \circ f$.

3. Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul et qu'il vérifie $f^2 = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,f(x))$ soit une famille libre de E.
   (b) Montrer que cette famille $\mathcal{E}$ est alors une base de E.
   (c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.
4. Dans cette question, on suppose que f vérifie $f^2 = -\operatorname{Id}$.
   (a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \lambda \cdot x$ admet une unique solution (que l'on précisera).
   (b) Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{E} = (a,f(a))$ est une base de E.
   (c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

C Un espace de polynômes

Dans cette partie, on appelle $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré maximum 3, dont on appelle $\mathcal{B} = (1,X,X^2,X^3)$ la base canonique. On définit

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ P & \mapsto & (1+X^2)P'' - 2XP' \end{array}$$

5. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et calculer son rang.
   (c) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
   (d) On appelle F l'ensemble des polynômes $P \in E$ qui vérifient $f(P) = -2P$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.
   (e) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (f) Vrai ou faux ? (justifier)
      i. $\operatorname{Im} f = F$.
      ii. $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
6. Le but de cette question est de déterminer les endomorphismes φ de E qui vérifient $\varphi^2 = f$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ solution du problème.
   (a) Montrer que $f \circ \varphi = \varphi \circ f$.
   (b) Montrer que $\forall P \in \operatorname{Ker} f, \varphi(P) \in \operatorname{Ker} f$.
   (c) On définit $\varphi_0 : \begin{array}{rcl} \operatorname{Ker} f & \to & \operatorname{Ker} f \\ P & \mapsto & \varphi(P) \end{array}$.
   On remarque que, d'après ce qui précède, φ_0 est un endomorphisme de $\operatorname{Ker} f$.
   Montrer que $\varphi_0^2 = 0$. En déduire que soit $\varphi_0 = 0$, soit il existe une base de $\operatorname{Ker} f$ dans laquelle la matrice de φ_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) De la même manière, justifier l'existence d'un endomorphisme φ_1 de F défini par : $\forall P \in F, \varphi_1(P) = \varphi(P)$. Calculer φ_1^2. Que la partie B nous permet-elle de conclure ?
   (e) En déduire la forme de la matrice de φ dans une base bien choisie.

Problème 2

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

- $E_0 = \left\{ f \in E, \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$,
- C le sous-ensemble des fonctions constantes,
- P le sous-ensemble des fonctions continues 2π-périodiques,
- $P_0 = \left\{ f \in P, \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

1. (a) Montrer que E_0 et C sont des sous-espaces vectoriels de E.

(b) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E puis démontrer *rapidement* que P_0 est aussi un sous-espace vectoriel de E.

(c) Montrer que $E = E_0 \oplus C$.

2. Soit $f \in E$.

   (a) Montrer que f admet une unique primitive F continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(t)\mathrm{d}t = 0$. On notera $\varphi(f)$ cette primitive.

   (b) L'application $\varphi : E \to E$ est-elle linéaire ? injective ? surjective ? bijective ?

3. Soit $f \in P$.

   (a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que f admet une primitive dans P si et seulement si $f \in P_0$.

   (c) Dans ce cas, montrer que $\varphi(f) \in P_0$.

4. On note désormais $\Phi : P_0 \to P_0$ la restriction de φ à P_0. On définit par récurrence des fonctions polynomiales $B_n : [0{,}2\pi] \to \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par :
   - B_0 est la fonction constante égale à 1,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \varphi(B_n)$.

   (a) Calculer $B_n(t)$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(2\pi)$.

5. Pour tout $f \in P_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $H_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$H_n(f) : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_n(t) f(x+t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que $H_n(f)$ est une fonction 2π-périodique.

   (b) Montrer que $H_1(f) = \Phi(f)$.

   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $H_{n+1}(f) = H_n(\Phi(f))$.

   (d) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $H_n(f) = \Phi^n(f)$ (où Φ^n désigne $\underbrace{\Phi \circ \ldots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$)