

TD 10. Techniques d'approximation

10.1 Nombres réels

Dans les premiers exercices, on note $\lfloor A \rfloor = E(A)$

Exercice 10.1

Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Exercice 10.2

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

10.2 Comparaisons de suites

Exercice 10.3

Déterminer un équivalent et la limite quand $n \rightarrow +\infty$ des suites suivantes :

(a) $n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}},$

(f) $\frac{\sin(1/n) + 1}{\tan(\frac{1}{n^2})},$

(b) $\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}},$

(c) $\left(\frac{n}{n-x}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R},$

(g) $e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{n}},$

(d) $n^{1/n} - 1,$

(h) $\ln \left(\frac{n^2 - n + 5}{n^2 + n - 3} \right).$

(e) $\ln(n + \sqrt{n^2 + 1}),$

Exercice 10.4

Soit $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout $k > 0$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1) \leq \frac{1}{k-1}$. (on pourra utiliser une intégrale)
2. En déduire la limite de h_n .
3. Calculer la limite de $\frac{h_n}{\ln n}$.
4. Conclure.

Exercice 10.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n le nombre réel solution de $\tan x = x$ sur $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
2. Soit $y_n = x_n - n\pi$. Montrer que $y_n \sim \pi/2$.
3. Soit $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $z_n \sim -\frac{1}{n\pi}$.