



# TD 11. Nombres entiers et dénombrement

## 11.1 Arithmétique

### Exercice 11.1

Montrer que  $5^{45} + 4^{30}$  est un nombre composé.

### Exercice 11.2

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2$  divise  $(n+1)^n - 1$ .

### Exercice 11.3

Trouver tous les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $xy = 2x + 3y$ .

### Exercice 11.4 (Nombres de Mersenne, nombres parfaits)

Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $M_n = 2^n - 1$ .

1. Montrer que si  $M_n$  est premier, alors  $n$  est premier.
2. On appelle **nombre parfait** un nombre  $k$  dont la somme des diviseurs vaut exactement  $2k$ . Montrer que si  $M_n$  est un nombre premier, alors  $2^{n-1}M_n$  est un nombre parfait.

## 11.2 Dénombrement

### Exercice 11.5

Une urne contient 15 boules numérotées. Celles numérotées de 1 à 5 sont blanches, celles numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément 5 boules.
  - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
  - (b) Combien y a-t-il de tirages unicolores possibles ?
  - (c) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules sans remise.
  - (a) Combien y a-t-il de tirages (ordonnés) possibles ?
  - (b) Combien y a-t-il de tirages donnant 2 boules noires et 3 boules blanches ?

### Exercice 11.6 (Des chiffres et des lettres)

En utilisant l'alphabet français, ses 20 consonnes et 6 voyelles, combien existe-t-il de mots (ayant un sens ou non) formés de trois lettres

1. quelconques ?
2. distinctes ?
3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ?
4. dont au moins une consonne ?
5. dont au moins deux voyelles identiques ?
6. alternant consonne(s) et voyelle(s) ?

**Exercice 11.7**

Combien y a-t-il de mots de cinq lettres avec au moins un Z ?

**Exercice 11.8** (*Anagrammes*)

Combien existe-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot OISEAU ? de mot ANAGRAMME ?

**Exercice 11.9**

Les immatriculations automobiles sont désormais composées de deux lettres, suivies de trois chiffres et à nouveau deux lettres. En outre, les deux premières lettres ne sont jamais WW ni SS, les trois chiffres ne sont pas 000 et les dernières lettres ne peuvent pas être SS. Combien y a-t-il d'immatriculations possibles ?