TD 3. Ensembles et applications

Exercice 3.1

Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$ (rappel : $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E).

Exercice 3.2

Étant données trois parties A, B, C de E, montrer que

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C.$$

Exercice 3.3

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 3.4 ♥

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que si $A \subset E$, alors $A \subset f^{-1}(f(A))$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
2. Montrer que si $B \subset F$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
3. Soient A_1, A_2 deux parties de E.
   (a) Montrer que
   $$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$
   Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
   (b) Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que
   $$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$
4. Soient B_1, B_2 deux parties de F.
   (a) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$
   (b) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Exercice 3.5

1. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

(a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

(a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$.

3. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si c'est possible, donner une expression de leur bijection réciproque.

(a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-3y, x+2y) \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,z,x) \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f:\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \end{array}$.

Exercice 3.6 ♣

Étant donnée $f : E \to F$, on note

$$f_d : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad f_r : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}.$$

1. Montrer que f est injective si en seulement si f_d est injective.
2. Montrer que f est surjective si en seulement si f_r est injective.