TD 5. Fonctions usuelles

Exercice 5.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3 \quad \text{et} \quad f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

Exercice 5.2

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.
2. Si f est paire et n fois dérivable, discuter de la parité de sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ en fonction de n.
3. Qu'en est-il pour une primitive de fonction paire ? impaire ?
4. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction T-périodique (dérivable) ? Et d'une primitive ?

Exercice 5.3

On définit f par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Déterminer les points où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 5.4

Déterminer les limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\ln(x^3)}{x^4}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 e^x (\ln(-x))^2$.

Exercice 5.5

Étudier les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \ln(\ln x)$,
2. $f_2(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$,
3. $f_3(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$,
4. $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$,
5. $f_5(x) = \tan x + \frac{1}{\tan x}$,
6. $f_6(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$,
7. $f_7(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.

Exercice 5.6

Combien la fonction $x \mapsto (x-1)e^x - ex + 1$ a-t-elle de zéros ?

Exercice 5.7

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Exercice 5.8

Pour $x > 0$, on définit $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. Montrer que f réalise une bijection sur $]0, +\infty[$ dont on précisera l'image puis exprimer la bijection réciproque de f et sa dérivée.

Exercice 5.9 *(Caractérisations du logarithme, tome 1)*

Étant donné un intervalle I, on cherche les fonctions f non nulles et dérivables sur I telles que

$$\forall (x,y) \in I,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que si f est définie en 0, alors f est la fonction nulle.
2. On considère à partir de maintenant que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(y) = f(xy)$. Calculer $g'(y)$ et en déduire $f'(x)$.
4. Donner les fonctions solutions du problème.

Exercice 5.10 *(Caractérisations du logarithme, tome 2)*

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On note f la primitive de $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ s'annulant en $x = 1$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(xy)$. Calculer $g'(x)$ puis $f'(x)$.
2. En déduire que $g - f$ est constante puis que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 5.11

Calculer le maximum pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $\sqrt[n]{n}$.

Exercice 5.12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui convient) les équations, inéquations ou systèmes suivants.

1. $\sqrt{19 - x} + \sqrt{97 + x} = 14$,
2. $|2x - 4| \leqslant |x - 1|$
3. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$,
4. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
5. $5^x - 5^{x-1} - 2^{3x-1} = 0$,
6. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$,
7. $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leqslant \ln 2$,
8. $\begin{cases} x + y = 52 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$,
9. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$,
10. $\tan(3 \operatorname{Arcsin} x) = 1$,
11. $\operatorname{ch} x = a$,
12. $5 \operatorname{ch} x - 3 \operatorname{sh} x = 4$.

Exercice 5.13

Calculer

1. pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\operatorname{Arctan} x)$ et $\cos(\operatorname{Arctan} x)$,
2. pour $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$,
3. pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x)$.

Exercice 5.14 *(Formule de Machin)*

1. Montrer que $\operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arctan}(1/3) = \pi/4$.
2. Lorsqu'il est défini, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.
3. En déduire que $\pi/4 = 4 \operatorname{Arctan}(1/5) - \operatorname{Arctan}(1/239)$.

Exercice 5.15

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(x)$.

Exercice 5.16

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{5x} + e^{-x}}{e^{4x} - 1}$.

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{sh}(2x)} = \dfrac{4\operatorname{ch}^2(x) - 3}{2\operatorname{sh}(x)}$.
2. Étudier f.

Exercice 5.17 $*$

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{(1-x)} \geqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$.